Сојузен натпревар 1980

I година

1. Цената на еден молив е цел број евроценти. Вкупната цена на 9 моливи е поголема од 11, а е помала од 12 евра, додека вкупната цена на 13 моливи е поголема од 15, а помала од 16 евра. Колку чини еден молив?

Решение. Нека x е цената на моливот во евроценти. Тогаш од

$$1100 < 9x < 1200\ ,$$

следува $122 < x \le 133$, а од

$$1500 < 13x < 1600$$

следува $115 < x \le 123$. Но, x е цел број, па од $122 < x \le 133$ и $115 < x \le 123$ следува $x = 123$ евроценти.

2. Дадени се броевите 1, 12, 123, ..., 1234567890, 12345678901, ... Секој број се добива од претходниот така што му се допишува следната цифра, при што по 0 следува 1, по 1 следува 2, ..., по 9 следува 0. Докажи дека барем еден од овие броеви е делив со 1981.

Решение. Ги разгледуваме броевите од даденото множество кои се од видот

$$12...9012...90...12...90\ .$$

Вакви броеви има бесконечно многу, а имаме конечно многу остатоци при делење со 1981. Зоа постојат два броја од наведениот вид кои при делење со 1981 даваат ист остаток. Разликата на овие два броја е делива со 1981. Но, разликата на двата броја е број од видот

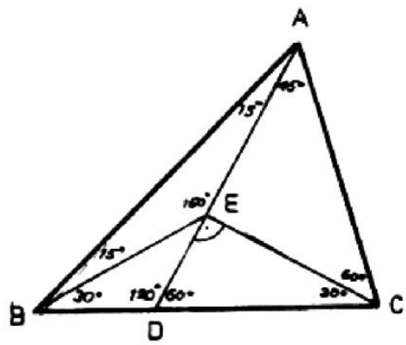
$$12...9012...9000...00,$$

т.е. таа е број A од наведениот вид помножен со степен на бројот 10. Бидејќи $(1981,10) = 1$, заклучуваме дека бројот A е делив со 1981.

3. Нека D е точка на страната BC на триаголникот ABC, таква што $DC = 2BD$. Определи ги останатите агли на триаголникот ABC ако $\measuredangle ABC = 45^\circ$ и $\measuredangle ADC = 60^\circ$.

Решение. Со E да го означиме подножјето на нормалата повлечена од C на правата AD (цртеж десно). Тогаш $2ED = DC$, па од $2BD = DC$ следува $ED = BD$. Во рамнокракиот триаголник EBD аголот при врвот е еднаков на 120°, па затоа

$$\measuredangle EBD = \measuredangle DEB = 30^\circ,\ \measuredangle ABE = 15^\circ\ .$$



Во триаголникот EBC аглите во темињата B и C се еднакви на 30°, па затоа $EB =$

CE. Во триаголниот ABE аглите во темињата A и B се еднакви на 15°, па затоа $BE = EA$. Значи, $CE = EA$, од што следува дека триаголникот CEA рамнокрак и како тој е правоаголен, заклучуваме дека неговите остри агли се по 45°. Оттука следува $\measuredangle BCA = 75^\circ$ и $\measuredangle CAB = 60^\circ$.

4. Град има 1980 раскрсници, а во секоја од нив се среќаваат по три улици. Постои кружна автобуска линија, која минува низ секоја раскрсница точно еднаш. Одлучено е во секоја улица да се засадат стебла само на една од овие видови дрвја: костен, бреза и липа. Докажи дека тоа може да се направи така што во секоја раскрсница се среќаваат три дрвореди од различни видови.

Решение. Да тргнеме од произволна раскрсница по трасата на автобуската линија. Во првата улица да засадиме еден вид дрва (на пример костен), по минувањето низ раскрсницата во втората улица да засадиме друг вид дрва (на пример бреза), потоа повторно костен и така наизменично. Бидејќи 1980 е парен број, во последната улица пред враќањето на почената станица ќе биде засадена бреза. Сега, во сите улици во кои не минува автобусот ќе се засади преостанатиот вид дрва (значи липа). Јасно, вака засадените дрва го задоволуваат условот на задачата.

II година

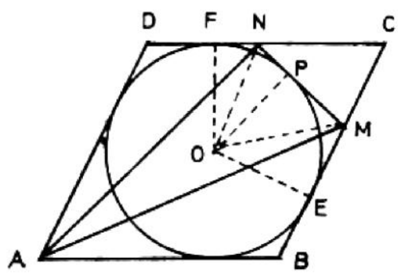
1. Определи ги сите цели броеви x така што $x^2 + 3x + 24$ е точен квадрат.

Решение. Во множеството цели броеви $\mathbb{Z}$ треба да ја решиме равенката $x^2 + 3x + 24 = y^2$. Оваа равенка е еквивалентна на равенката $(2x+3)^2 + 87 = 4y^2$, односно на равенката

$$(2y+2x+3)(2y-2x-3) = 3 \cdot 89 .$$

Од последната равенка ги добиваме можностите $2x + 2y + 3 = \pm 1, \pm 3, \pm 29, \pm 87$ и на нив соодветните вредности на $2y - 2x - 3$. Со решавање на овие системи равенки добиваме $x \in \{-23, -8, 5, 20\}$. Со непосредна проверка гледаме дека ие навистина ги задоволуваат условите на задачата.

2. Во даден ромб $ABCD$ е впишана кружница. Нека тангента на оваа кружница ги сече страните BC и CD во точките M и N. Докажи дека плоштината на триаголникот AMN е константна.



Решение. Нека O е центарот на кружницата впишана во дадениот ромб, E и F се точките во кои таа кружница редоследно ги допира страните BC и CD, а P е точката во која кружницата ја допираа правата MN, цртеж десно. Јасно, триаголниците ONF и ONP се складни. Од друга страна, триаголниците ONF и ANF имаат заедничка основа NF и првиот има два пати помала висина. Затоа

$$P_{ANF} = 2P_{ONF} = P_{OPNF} .$$

Слично се докажува дека

$$P_{AEM} = 2P_{OEM} = P_{OEMP} .$$

Затоа:

$$P_{AMN} = P_{AEMNF} - P_{AEM} - P_{ANF} = P_{AEMNF} - P_{OENP} - P_{OPNF} = P_{AEOF} ,$$

а последната плоштина очигледно не зависи од тангентата MN .

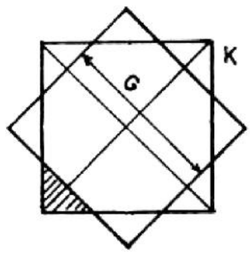
3. Страната на квадратот K има должина 7. Дали може овој квадрат да се покрие со 8 квадрати чии страни имаат должина 3,

а) при услов страните на тие квадрати да се паралелни со соодветни страни на квадратот K ,

б) без условот под а).

Решение. а) Да ги воочиме следните девет точки: темињата на квадратот K , средините на неговите страни и пресекот на дијагоналите. Јасно, не постои квадрат со страна 3 чии страни се паралелни со соодветните страни на дадениот квадрат и кој покрива две од дадените точки. Затоа за вакво покривање на квадратот се потребни најмалку 9 мали квадрати.

б) Да поставиме квадрат со должина на страна 6 така што центарот му се совпаѓа со центарот на квадратот K , а страните се паралелни со неговите дијагонали, цртеж десно. Лесно се докажува дека страните на секој од рамнокраките правоаголни триаголници кои не се покриени од овој квадрат се еднакви на $7-3\sqrt{2}$, т.е. помали од 3, па секој д овие триаголници може да се покрие со еден од преостанатите четири квадрати со должина на страна 3.



4. За природните броеви $a_1, a_3, ..., a_{19}, b_1, b_2, ..., b_{21}$ важи

$$1 \le a_1 < a_3 < ... < a_{19} \le 200, \quad 1 \le b_1 < b_2 < ... < b_{21} \le 200 .$$

Докажи дека меѓу нив може да се изберат броеви a_i, a_j, b_p, b_q такви што важи

$$a_i < a_j, b_p < b_q \text{ и } a_j - a_i = b_q - b_p .$$

Решение. Да формираме $19 \cdot 21 = 399$ разлики од видот $a_i - b_p$, $i = 1, 2, ..., 19$, $p = 1, 2, \dots, 21$. Во интервалот $[-199, 199]$ имаме 399 цели броеви. Можни се два случаја.

1) Сите разлики се различни меѓу себе. Тогаш за некои $i, j \in \{1, 2, ..., 19\}$ и некои $p, q \in \{1, 2, ..., 21\}$ важи $a_i - b_p = -199$, $a_j - b_q = 199$. Тоа значи дека

$$a_i = b_q = 1 \text{ и } a_j = b_p = 200 .$$

Јасно, притоа важи

$$a_i < a_j ,\ b_q < b_p \quad \text{и} \quad a_j - a_i = b_p - b_q$$

2) Некои две од овие разлики се еднакви: $a_i - b_p = a_j - b_q$. Тогаш

$$a_j - a_i = b_q - b_p ,$$

при што или $a_i < a_j$, $b_p < b_q$ или $a_j < a_i$, $b_q < b_p$.

III година

1. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^{5-x} = (6-x)^{1-x} .$$

Решение. Со непосредна проверка се добива дека од броевите 1, 2, ...,6 само 1 и 5 ја задоволуваат дадената равенка. Нека претпоставиме дека некој природен број $x > 6$ е решение на равенката. Јасно, x е непарен број, т.е. $x = 2k+1, k \geq 3$. Со замена во равенката ја добиваме равенката $(2k+1)^{4-2k} = (5-2k)^{-2k}$, која е еквивалентна на равенката

$$(1+\tfrac{6}{2k-5})^{k-2} = (2k-5)^2 .$$

Според тоа, $\frac{6}{2k-5}$ мора да е цел број, т.е. мора да е $2k-5 \in \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6\}$. Вредностите ±2 и ±6 е парни, па затоа отпаѓаат, а за вредностите -1 и -3 се добива $2k+1 < 7$. Останува уште $2k+1 = 7$ и $2k+1 = 9$. Со непосредна проверка се добива дека во првиот случај немаме решение, а во вториот случја имаме решение $x = 9$.

Конечно, решенија на дадената равенка се $x = 1, x = 5, x = 9$.

2. Дадени се 18 отсечки за чии должини $x_1, x_2, ..., x_{18}$ важи

$$1 \leq x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_{18} \leq 1980 .$$

Докажи дека меѓу дадените отсечки постојат три кои може да се страни на триаголник.

Решение. Да препоставиме дека меѓу дадените отсечки не постојат три од кои може да се формира триаголник. Тогаш за секој $i = 1, 2, ..., 16$ важи $x_i + x_{i+1} \leq x_{i+2}$. Оттука следува:

$$\begin{aligned} x_{18} &\geq x_{17} + x_{16} \geq (x_{16} + x_{15}) + x_{16} = 2x_{16} + x_{15} \\ &\geq 2(x_{15} + x_{14}) + x_{15} = 3x_{15} + 2x_{14} \\ &\geq 3(x_{14} + x_{13}) + 2x_{14} = 5x_{14} + 3x_{13} \\ &\geq 5(x_{13} + x_{12}) + 3x_{13} = 8x_{13} + 5x_{12} \\ &\geq ... \geq 1597x_2 + 987x_1 \geq 2584, \end{aligned}$$

што противречи на претпоставката $x_{18} \leq 1980$.

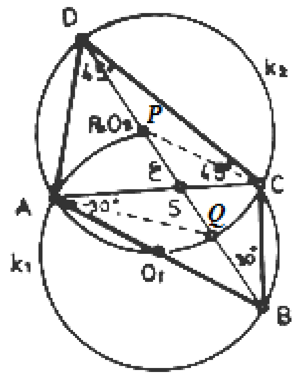
3. Нека S е пресекот на дијагоналите на конвексниот четириаголник $ABCD$. Ако

$$\measuredangle SAB = \measuredangle SBC = 30^\circ \text{ и } \measuredangle SCD = \measuredangle SDA = 45^\circ,$$

определи го аголот меѓу дијагоналите на тој четириаголник.

Решение. Заради определеност да претпоставиме дека $\measuredangle ASD = \varphi$ е остар, цртеж десно. Случајот кога овој агол не е остар се разгледува аналогно. Овој агол е надворешен за триаголниците SCD и SAB, па лесно се добива

$$\varphi = \measuredangle CDA = \measuredangle ABC.$$



Значи, точките B и D припаѓаат на лаци на кружници k_1 и k_2 со еднакви радиуси (да кажеме r) кои се геометриски места на точки од кои отсечката AC се гледа под агол φ. Центрите на овие кружници да ги означиме со O_1 и O_2, а пресеците на отсечката BD (различни од B и D) со кружниците k_1 и k_2 редоследно со P и Q (види цртеж).

Бидејќи $\measuredangle AQD = \measuredangle ACD = 45^\circ$ и $\measuredangle QDA = 45^\circ$, заклучуваме дека триаголникот AQD е рамнокрак правоаголен и центарот O_2 на опишаната кружница околу него k_2 е средина на хипотенузата DQ. Понатаму, важи $\measuredangle BPC = \measuredangle BAC = 30^\circ$ и $\measuredangle PBC = 30^\circ$, па затоа триаголникот BCP е рамнокрак и $\measuredangle BCP = 120^\circ$, што значи $BC = CP = r$. Сега, бидејќи $CP = CO_2$ и $O_2 \in BD$, важи $P = O_2$. Понатаму, $\measuredangle CO_2A = 120^\circ$ и $\measuredangle CDA = 60^\circ$, па затоа $\varphi = 60^\circ$.

4. Определи ги сите полиноми од видот $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, каде $a_j \in \{-1,1\}$, $j = 0,1,2,...,n$, кои имаат само реални нули.

Решение. Да ги најдеме полиномите со наведеното својство за кои $a_n = 1$. Останатите полиноми ги добиваме ако најдените ги помножиме со -1.

За $n = 1$ такви полиноми се $x-1$ и $x+1$.

Нека претпоставиме дека $n \geq 2$ и $x_i, i = 1,2,...,n$ се реалните нули на бараниот полином. Од Виетовите формули следува

$$(x_1 x_2 ... x_n)^2 = a_0^2 = 1$$

и

$$0 \le \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 - 2\sum_{i \ne k} x_i x_k = a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} = 1 - 2a_{n-2} .$$

Но, $a_{n-2} \in \{1,-1\}$, па затоа $a_{n-2} = -1$ и $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 3$. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{3}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \ge (x_1^2 x_2^2 ... x_n^2)^{1/n} = 1,$$

па затоа $n \le 3$. Лесно се добива дека за $n = 2$ бараните полиноми се

$$\pm(x^2 + x - 1) \text{ и } \pm(x^2 - x - 1) .$$

За $n = 3$ само полиномите

$$\pm(x^3 + x^2 - x - 1) \text{ и } \pm(x^3 - x^2 - x + 1)$$

имаат реални нули, а додека другите полиноми од бараниот вид имаат комплексни нули.

Конечно, бараните полиноми се:

$$\pm(x-1),\ \pm(x+1),\ \pm(x^2 + x - 1),\ \pm(x^2 - x - 1),$$

$$\pm(x^3 + x^2 - x - 1) \text{ и } \pm(x^3 - x^2 - x + 1) .$$

IV година

1. Дадена е елипса со параметарски равенки

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ a \ne b .$$

Докажи дека точките чии параметри се t_1, t_2, t_3, t_4 припаѓаат на една кружница ако и само ако постои цел број k таков што $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 2k\pi$.

Решение. Да претпоставиме дека точките на елипсата кои соодветствуваат на параметрите t_1, t_2, t_3, t_4 припаѓаат на некоја кружница. Нека

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

е равенката на таа кружница, каде A, B, C се реални броеви и $A^2 + B^2 - 4AC > 0$. Заменуваме $x = a\cos t,\ y = b\sin t$ и ставаме $u = \operatorname{tg}\frac{t}{2}$, со што по средувањето равенката ја трансформираме во видот:

$$(a^2 - aA + C)u^4 + 2bBu^3 + (2C - 2a^2 + 4b^2)u^2 + 2bBu + (a^2 + aA + C) = 0 , \quad (1)$$

при што за решенијата u_1, u_2, u_3, u_4 на добиената равенка важи $u_i = \operatorname{tg}\frac{t_i}{2}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Да означиме

$$D_1 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 ,$$

$$D_2 = u_1u_2 + u_1u_3 + u_1u_4 + u_2u_3 + u_2u_4 + u_3u_4 ,$$

$$D_3 = u_1u_2u_3 + u_1u_2u_4 + u_1u_3u_4 + u_2u_3u_4,$$
$$D_4 = u_1u_2u_3u_4.$$

Бидејќи равенката (1) пред u^3 и u има еднакви коефициенти, од Виетовите правила следува дека $D_1 = D_3$. Сега, применувајќи ги адиционите формули добиваме

$$\operatorname{tg}\frac{t_1+t_2+t_3+t_4}{2} = \frac{D_1-D_3}{1-D_2+D_4} = 0,$$

од каде следува

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 2k\pi, \tag{2}$$

за некој $k \in \mathbb{Z}$.

Да претпоставиме дека за некој $k \in \mathbb{Z}$ важи (2), при што можеме да претпоставиме дека $t_i \in [0, 2\pi)$ за $i = 1, 2, 3, 4$. Нека кружницата определена со параметрите t_1, t_2, t_3 ја сече елипсата во точка која соодветствува на параметар $t_4' \in [0, 2\pi)$. Тогаш од претходно докажаното следува

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4' = 2k'\pi, \tag{3}$$

за некој $k' \in \mathbb{Z}$. Од (2) и (3) следува $t_4' - t_4 = 2(k'-k)\pi$, па како $t_4, t_4' \in [0, 2\pi)$, добиваме $k = k'$ и $t_4' = t_4$. Според тоа, точките на елипсата кои соодветствуваат на параметрите t_1, t_2, t_3, t_4 припаѓаат на иста кружница.

2. Нека S е множество кое се состои од n реални броеви и T е множеството збирови од по k различни броеви од S, каде $n \geq k$. Докажи дека множеството T содржи најмалку $k(n-k)+1$ елемент.

Решение. Елементите на даденото множество да ги означиме со $x_1, x_2, ..., x_n$ и нека $x_1 < x_2 < ... < x_n$. Ќе докажеме дека постојат $k(n-k)+1$ елементи $y_i \in T$, $i = 0, 1, 2, ..., k(n-k)$ кои формираат строго растечка низа, со што ќе биде докажано тврдењето на задачата.

Прво да ставиме $y_0 = x_1 + x_2 + ... + x_k$, а потоа

$$y_1 = y_0 + x_{k+1} - x_k > y_0,$$
$$y_2 = y_1 + x_k - x_{k-1} > y_1,$$
$$......................................$$
$$y_k = y_{k-1} + x_2 - x_1 > y_{k-1},$$
$$y_{k+1} = y_k + x_{k+2} - x_{k+1} > y_k,$$
$$y_{k+2} = y_{k+1} + x_{k+1} - x_k > y_{k+1},$$
$$..$$
$$y_{2k} = y_{2k-1} + x_3 - x_2 > y_{2k-1},$$

итн. Последниот елемент во $(n-k)-$тата група ќе биде

$$y_{(n-k)k} = y_{(n-k)k-1} + x_{n-k+1} - x_{n-k} > y_{(n-k)k-1}.$$

3. Даден е природен број a. Низата (a_n) е определена со $a_0 = a$, ако

$$a_n = c_0 + 10c_1 + ... + 10^k c_k,$$

каде $c_0, c_1, ..., c_k \in \{0,1,2,...,9\}$, тогаш

$$a_{n+1} = 2c_0 + c_1 + 10c_2 + ... + 10^{k-1} c_k.$$

Кои броеви во низата (a_n) се појавуваат бесконечно многу пати?

Решение. За произволен n нека $a_n = 10A + c_0$. Тогаш според дефиницијата $a_{n+1} = A + 2c_0$. Оттука следува $2a_n - a_{n+1} = 19A$, па затоа:

1) $19 | a_n$ акои само ако $19\}a_{n+1}$.

Исто така важи $a_n - a_{n+1} = 9A - c_0$. Затоа за $A \geq 1$, $a_n - a_{n+1} \geq 0$, при што важи знак за равенство ако и само ако $A = 1$ и $c_0 = 9$. Со други зборови:

2) Ако $a_n \geq 10$ и $a_n \neq 19$, тогаш $a_n > a_{n+1}$.

Од 2) следува дека низата (a_n) строго опаѓа, додека некој нејзин член не стане помал од 20. Ако овој член е еднаков на 19 (а тоа според 1) се случува ако и само ако $19 | a_0$), тогаш и сите следни членови ќе бидат едакви на 19. Ако овој член е помал од 19, тогаш низата станува периодична со период 18 во кој се појавуваат сите броеви од множеството $\{1,2,...,18\}$. (Провери!)

4. Дадена е функција $f:[0,1] \to [0,1]$ таква што $0,1 \in f([0,1])$ и за секои $x, y \in [0,1]$ важи

$$| f(x) - f(y) | \leq \tfrac{|x - f(x)| + |y - f(y)|}{2}. \qquad (1)$$

Докажи дека постои точно еден број $x \in [0,1]$ таков што $f(x) = x$.

Решение. Од $0,1 \in f([0,1])$ следува дека постојат $a, b \in [0,1]$ такви што $f(a) = 0$ и $f(b) = 1$. Со замена во (1) добиваме

$$2 = 2| f(a) - f(b) | \leq | a - 0 | + | b - 1 | \leq 2,$$

па затоа $a = 1$ и $b = 0$.

Ќе докажеме дека $f(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}$. Ако $f(\tfrac{1}{2}) > \tfrac{1}{2}$, тогаш за $x = \tfrac{1}{2}$ и $y = 1$ добиваме

$$\begin{aligned} 2f(\tfrac{1}{2}) &= 2| f(\tfrac{1}{2}) - f(1) | \\ &\leq | \tfrac{1}{2} - f(\tfrac{1}{2}) | + | 1 - f(1) | \quad , \\ &= f(\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{2} + 1 = f(\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

т.е. $f(\tfrac{1}{2}) \leq \tfrac{1}{2}$, што е противречност. Ако $f(\tfrac{1}{2}) < \tfrac{1}{2}$, тогаш $x = \tfrac{1}{2}$ и $y = 0$ добиваме

$$\begin{aligned}2(1-f(\tfrac{1}{2})) &= 2\,|\,f(\tfrac{1}{2})-f(0)\,| \\ &\le |\,\tfrac{1}{2}-f(\tfrac{1}{2})\,|+|\,0-f(0)\,| \\ &= \tfrac{1}{2}-f(\tfrac{1}{2})+1=\tfrac{3}{2}-f(\tfrac{1}{2}),\end{aligned}$$

т.е. $f(\frac{1}{2}) \ge \frac{1}{2}$, што е противречност. Според тоа, $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$. Ќе докажеме дека не постои точка $x \ne \frac{1}{2}$ таква што $f(x)=x$. Навистина, ако за некој $x \ne \frac{1}{2}$ важи $f(x)=x$, тогаш

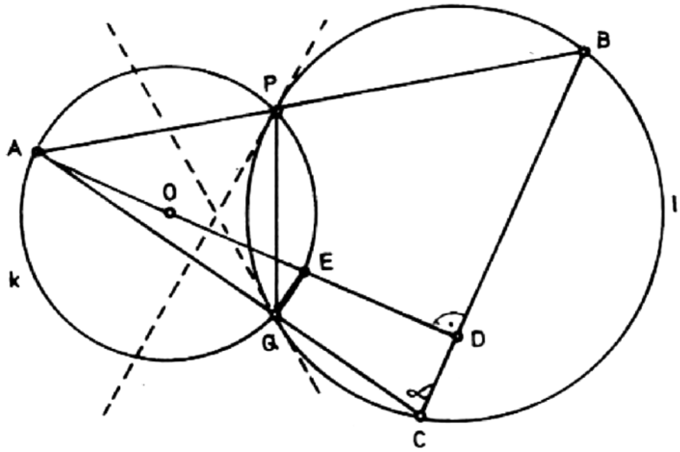
$$0<2\,|\,x-\tfrac{1}{2}\,|=2\,|\,f(x)-f(\tfrac{1}{2})\,|\le|\,x-f(x)\,|+|\,f(\tfrac{1}{2})-\tfrac{1}{2}\,|=0+0=0,$$

што е противречност.

Мала олимпијада

1. Кружниците k и l се сечат во точките P и Q. Нека A е произволна точка на кружницата k, различна од P и Q и нека правите AP и AQ ја сечат кружницата l, соодветно уште во точките B и C. Докажи дека правата определена со висината од темето A во триаголникот ABC минува низ фиксна точка која не зависи од точката A.

Решение. Ќе докажеме дека секоја права определена со висина на некој триаголник ABC го содржи центарот O на кружницата k.



Конструираме тангенти на кружницата l во точките P и Q. Тие ја делат кружницата k на четири лаци. Тврдењето ќе го докажеме во случајот кога точката A припаѓа на лакот кој е прикажан на горниот цртеж, а доказот на останатите случаи го препуштаме на читателот за вежба.

Нека D е подножјето на висината повлечена од темето A на триаголникот ABC и E е втората пресечна точка на правата AD и кружницата k. Да означиме

$\measuredangle QCB = \alpha$. Од тетивниот четириаголник $PQCB$ добиваме $\measuredangle BPQ = 180^\circ - \alpha$, па затоа $\measuredangle AEQ = \measuredangle APQ = \alpha$. Од друга страна $\measuredangle QAE = \measuredangle CAD = 90^\circ - \alpha$, што значи дека триаголникот AEQ е правоаголен со прав агол во темето Q . Последното значи дека правата AE , односно правата AD го содржи центарот O на кружницата k , што и требаше да се докаже.

2. Нека a,b,c се цели броеви и m е природен број поголем од 1. Ако

$$a^n + bn + c \equiv 0 (\bmod m)$$

за секој природен број n , докажи дека

$$b^2 \equiv 0 (\bmod m) .$$

Дали мора да е $b \equiv 0 (\bmod m)$?

Решение. Од претпоставката за $n=1, n=2$ и $n=3$ добиваме редоследно:

$$a+b+c \equiv 0 (\bmod m), \quad a^2 + 2b + c \equiv 0 (\bmod m), \quad a^3 + 3b + c \equiv 0 (\bmod m) .$$

Од првите две релации следува

$$a^2 - a + b \equiv 0 (\bmod m) , \tag{1}$$

а од последните две следува

$$a^3 - a^2 + b \equiv 0 (\bmod m) . \tag{2}$$

Понатаму, од (1) и (2) добиваме

$$a^3 - 2a^2 + a = a(a-1)^2 \equiv 0 (\bmod m),$$
$$b^2 \equiv (a(a-1))^2 \equiv a(a(a-1)^2) (\bmod m),$$

од каде следува $b^2 \equiv 0 (\bmod m)$.

За да докажеме дека нека не мора да е $b \equiv 0 (\bmod m)$, доволно е да земеме $m=4, a=3, b=2, c=3$.

3. Низата (a_n) е определена со

$$a_1 = a,\ a_2 = b,\ a_{n+1} = \tfrac{a_n^2 + c}{a_{n-1}} ,\ \text{за } n = 2,3,\dots ,$$

каде $a,b,c \in \mathbb{R}$, $ab \neq 0$ и $c > 0$. Докажи дека $a_n \in \mathbb{Z}$ за $n = 1,2,3,\dots$ ако и само ако $a, b, \tfrac{a^2+b^2+c}{ab} \in \mathbb{Z}$.

Решение. Рекурентната релација можеме да ја запишеме во обликот $a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2 = c$, за $n \geq 2$. Оттука имаме $a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2 = c$, па затоа

$$a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2 = a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2 ,\ \text{т.е. } a_n(a_n + a_{n+2}) = a_{n+1}(a_{n-1} + a_{n+1}) ,$$

од каде добиваме

$$\tfrac{a_n + a_{n+2}}{a_{n+1}} = \tfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{a_n} = k ,\ \text{за } n \geq 2 .$$

Според тоа,

$$a_{n+1} = ka_n - a_{n-1}, n \geq 2, \qquad (1)$$

каде

$$k = \frac{a_1+a_3}{a_2} = \frac{a_1+\frac{a_2^2+c}{a_1}}{a_2} = \frac{a^2+b^2+c}{ab}.$$

Сега, ако $a, b, \frac{a^2+b^2+c}{ab} \in \mathbb{Z}$, тогаш $a_1 = a$ и $a_2 = b$ се цели броеви и од (1) следува дека $a_n \in \mathbb{Z}$ за $n = 1, 2, 3, \dots$.

Обратно, нека $a_n \in \mathbb{Z}$ за $n = 1, 2, 3, \dots$. Тогаш $a_1 = a$ и $a_2 = b$ се цели броеви и нека $k = \frac{a_1+a_3}{a_2}$ е рационален број, при што $k = \frac{p}{q}$, каде p и $q > 0$ се заемно прости броеви. Да претпоставиме дека $q > 1$. Од $pa_2 = qa_1 + qa_3$ следува $q \mid a_2$. Аналогно од $pa_n = qa_{n-1} + qa_{n+1}$ по индукција следува дека $q \mid a_n$ за $n \geq 2$. Од последното равенство следува дека за $n \geq 3$, q^2 го дели a_n, за $n \geq 4$, q^3 го дели a_n итн. за $n \geq s+1$, q^s го дели a_n. Од друга страна од равенството

$$a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2 = c,$$

кое важи за секој $n \geq 2$ следува дека c е цел број и дека q^s е делител на c за секој природен број s, што е противречност. Според тоа, $q = 1$ и $k = \frac{a_1+a_3}{a_2} = \frac{a^2+b^2+c}{ab}$ е цел број.

Забелешка. На натпреварот требаше да се докаже само првата импликација.