Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на Сојузот на математичарите на Македонија

Боривоје Миладиновиќ

РАВЕНКИ И СИСТЕМ РАВЕНКИ ВО КОИ НЕПОЗНАТАТА Е И ПОД ЗНАКОТ НА АПСОЛУТНА ВРЕДНОСТ

Апсолутна вредност или модул на реалниот број a, во ознака $|a|$, дефинираме со:

$$|a|=\begin{cases} a, \text{ ако } a\geq 0 \\ -a, \text{ ако } a<0. \end{cases}$$

За секој реален број a лесно се докажува дека:

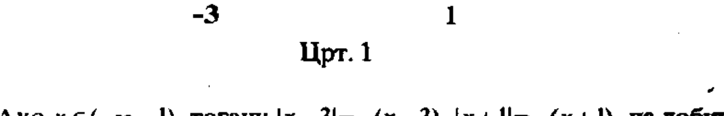
1° $|a|\geq 0$ $\quad$ 2° $|-a|=|a|$ $\quad$ 3° $||a||=|a|$ $\quad$ 4° $\sqrt{a^2}=|a|$ $\quad$ 5° $|a|^2=a^2$

Пред да покажеме како се решаваат равенки во кои непознатата е и под знакот на апсолутна вредност, ќе се потсетиме како даден израз (функција), што содржи апсолутна вредност, може да ес трансформира во израз (функција) што не го содржи знакот за апсолутна вредност.

Пример 1. *Функцијата $f(x)=|x-3|-2|x+1|$ запиши ја со помош на повеќе формули кои не го содржат знакот за апсолутна вредност.*

Решение. Прво ги одредуваме вредностите на променливата x, за кои изразите под знакот на апсолутна вредност се анулираат, т,е. добиваат вредност нула. Имаме $x-3=0$ и $x+1=0$, па оттука $x=3$ и $x=-1$. Броевите -1 и 3 го разбиваат множеството реални броеви на три дисјунктни интервали: $(-\infty,-1)$, $[-1,3)$ и $[3,+\infty)$.

Ја разгледуваме функцијата одделно во секој од овие три интервали; имаме (црт. 1):



Црт. 1

I) Ако $x\in(-\infty,-1)$, тогаш: $|x-3|=-(x-3)$, $|x+1|=-(x+1)$, па добиваме:

$$f(x)=-(x-3)+2(x+1)=x+5.$$

II) Ако $x \in [-1,3)$, тогаш: $|x-3|=-(x-3)$, $|x+1|=x+1$, па затоа:

$$f(x)=-(x-3)-2(x+1)=-3x+1.$$

III) Ако $x \in [3,+\infty)$, тогаш: $|x-3|=x-3$, $|x+1|=x+1$, па имаме:

$$f(x)=x-3-2(x+1)=-x-5.$$

Врз основа на изнесено добиваме:

$$f(x)=|x-3|-2|x+1|=\begin{cases} x+5, & \text{за } x \in (-\infty,-1) \\ -3x+1, & \text{за } x \in [-1,3) \\ -x-5, & \text{за } x \in [3,+\infty). \end{cases}$$

Често пати сме соочени со потребата да решиме равенка во која непознатата се среќава и под знакот за апсолутна вредност. Решавањето на овие равенки се разликува од решавањето на равенките кај кои непознатата не се јавува под знакот на апсолутна вредност. Во нашите разгледувања ќе се задржиме на некои основни видови равенки, кај кои непознатата е под знакот на апсолутна вредност. На конкретни примери ќе покажеме како "се ослободуваме" од апсолутната вредност.

1. Равенка од видот $|f(x)|=c$.

Оваа равенка има решение само ако $c \geq 0$. (Зошто?) Од дефиницијата за апсолутна вредност имаме:

$$(1) \qquad |f(x)|=c \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=c \\ f(x)=-c. \end{array}\right.$$

Пример 2. *Реши ја равенката* $|x+4|=7$.

Решение. Според (1) имаме:

$$|x+4|=7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+4=7 \\ x+4=-7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-11, \end{array}\right.$$

Значи, решение на дадената равенка се броевите -11 и 3, т.е. множеството решенија $M=\{-11,3\}$.

Забелешка. Дадената равенка има две решенија, бидејќи "по ослободувањето" од знакот на апсолутната вредност, таа "се распадна" на **вкупност** од две равенки.

2. Равенка од видот $|f(x)|=g(x)$.

Пример 3. *Реши ја равенката* $\sqrt{x^2-4x+4}=3x-8$.

Решение. Според својството 4° имаме:

$$\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|,$$

па дадената равенка е еквивалентна со равенката $|x-2|=3x-8$.

Бидејќи $|x-2|=\begin{cases} x-2, & \text{за } x \geq 2 \\ 2-x, & \text{за } x < 2 \end{cases}$ добиваме:

$$|x-2|=3x-8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x-2=3x-8, & \text{за } x \geq 2 \\ 2-x=3x-8, & \text{за } x<2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=3, & \text{за } x \geq 2 \\ x=2,5, & \text{за } x<2 \end{array}\right.$$

Но, $2,5>2$, т.е. $2,5 \notin (-\infty,2)$, па затоа бројот 2,5 не е решение на дадената равенка. Значи, решение на равенката е само бројот 3.

Забелешка. Равенката од видот $|f(x)|=g(x)$ можеме да ја решиме и поинаку. Имено, ги решаваме двете равенки $f(x)=g(x)$ и $f(x)=-g(x)$, а потоа проверуваме дали најдените решенија ја задоволуваат и почетната равенка. Да го покажеме тоа со равенката од претходниот пример $|x-2|=3x-8$. Имаме:

$$|x-2|=3x-8$$

$$\begin{array}{rcl} x-2=3x-8 & \qquad & x-2=-(3x-8) \\ -2x=-6 & & 4x=10 \\ x=3 & & x=2,5. \end{array}$$

Со проверка утврдуваме дека само бројот 3 е решение на дадената равенка, т.е. $M=\{3\}$.

3. Равенка од видот $|f_1(x)|+|f_2(x)|+\ldots+|f_n(x)|=g(x)$.

Пример 4. *Реши ја равенката* $|3x+6|+|x|=4x+6$.

Решение. Равенката ќе ја решиме со т.н. **метод на интервали**. Броевите -2 и 0 го разбиваат множеството реални броеви на три дисјунктни интервали: $(-\infty,-2)$, $[-2,0)$ и $[0,+\infty)$. Аналогно на пример 1, за левата страна на равенката добиваме:

$$|3x+6|+|x|=\begin{cases} -4x-6, & \text{за } x \in (-\infty,-2) \\ 2x+6, & \text{за } x \in [-2,0) \\ 4x+6, & \text{за } x \in [0,+\infty). \end{cases}$$

Според тоа, за да ја решиме почетната равенка треба да ги решиме равенките:

$$-4x-6=4x+6, \quad x \in (-\infty,-2)$$

$$2x+6=4x+6, \quad x \in [-2,0)$$

$$4x+6=4x+6, \quad x \in [0,+\infty).$$

Решението на првата равенка, бројот $-\frac{3}{2}$ не припаѓа на интервалот $(-\infty,-2)$, па значи таа нема решение. Од втората равенка добиваме $x=0$, но $0 \notin [-2,0)$, па значи и оваа равенка нема решение. Третата равенка е идентитет за секој $x \in$ R, па значи и за $x \in [0,+\infty)$.

Следствено, множеството решенија на почетната равенка е интервалот $[0,+\infty)$.

Пример 5. *Реши ја равенката* $|x-1|-2|x+2|+3|x-3|=4$.

Решение. Аналогно на претходниот пример имаме:

$$|x-1|-2|x+2|+3|x-3|=\begin{cases}-2x+14, & \text{за } x\in(-\infty,-2)\\ -6x+6, & \text{за } x\in[-2,1)\\ -4x+4, & \text{за } x\in[1,3)\\ 2x-14, & \text{за } x\in[3,+\infty).\end{cases}$$

Последователно добиваме:

1) Ако $x\in(-\infty,-2)$, тогаш: $-2x+14=4$, $x=5$. Но, $5\notin(-\infty,-2)$, па бројот 5 не е решение на почетната равенка.

2) Ако $x\in[-2,1)$, тогаш: $-6x+6=4$, $x=\frac{1}{3}$. Бидејќи $\frac{1}{3}\in[-2,1)$ следува дека бројот $\frac{1}{3}$ е решение на почетната равенка.

3) Ако $x\in[1,3)$, тогаш: $-4x+4=4$, $x=0$. Но $0\notin[1,3)$, па значи бројот 0 не е решение на почетната равенка.

4) Ако $x\in[3,+\infty)$, тогаш: $2x-14=4$, $x=9$. Бидејќи $9\in[3,+\infty)$ следува дека бројот 9 е решение на почетната равенка.

Конечно, множеството решенија на почетната равенка $M=\left\{\frac{1}{3},9\right\}$.

Пример 6. *Реши ја равенката* $2(x+3)^2-5|x+3|-3=0$.

Решение. Според својството 5°имаме $(x+3)^2=|x+3|^2$, па со смената $|x+3|=y$ ја добиваме равенката:

$$2y^2-5y-3=0,$$

чии корени се: $y_1=-\frac{1}{2}$, $y_2=3$.

Имајќи ја предвид смената, добиваме: $|x+3|=-\frac{1}{2}$ и $|x+3|=3$. Првата равенка нема решение, а решенијата на втората равенка се броевите 0 и 6.

Значи, множеството решенија на почетната равенка $M=\{0,6\}$.

Пример 7. *Реши ја равенката* $x^2+2x-3|x+1|+3=0$.

Решение. Дадената равенка ја запишуваме во видот:

$$x^2+2x+1-3|x+1|+2=0\text{, т.е. } |x+1|^2-3|x+1|+2=0$$

а потоа, како во претходниот пример, наоѓаме $M=\{-3,-2,0,1\}$.

4. Равенка од видот $|f(x)+|g(x)||=c$.

Равенката има решение само ако $c \geq 0$. Имаме:

$$(2) \qquad |f(x)+|g(x)||=c \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)+|g(x)|=c \\ f(x)+|g(x)|=-c, \end{cases}$$

а тоа се всушност две равенки од видот $|g(x)|=F(x)$.

Пример 8. *Реши ја равенката* $|2-|x-3||=5$.

Решение. Според (2) имаме:

$$|2-|x-3||=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-|x-3|=5 \\ 2-|x-3|=-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x-3|=-3 \\ |x-3|=7. \end{array}\right.$$

Првата равенка нема решение, а решенијата на втората се броевите 10 и -4.

Следствено, множеството решенија на почетната равенка $M=\{-4,10\}$.

5. Равенка од видот $|f(x)+|g(x)||=h(x)$.

Пример 9. *Реши ја равенката* $|2-|x-1||=2x-3$.

Решение. Во овој случај ослободувањето од знакот за апсолутна вредност го започнуваме "одвнатре".

Бидејќи $|x-1|=\begin{cases} x-1, & \text{за } x \geq 1 \\ 1-x, & \text{за } x<1 \end{cases}$ од дадената равенка ги добиваме равенките:

(а) $|x+1|=2x-3, \quad x \in (-\infty,1)$

(б) $|x-3|=2x-3, \quad x \in [1,+\infty)$

Аналогно на пример 2, за равенката (а) имаме:

$$x+1=2x-3 \qquad\qquad x+1=-(2x-3)$$

$$x=4 \qquad\qquad x=\frac{2}{3}$$

Бидејќи ниту едно од овие решенија не припаѓа на интервалот $(-\infty,1)$, заклучуваме дека броевите 4 и $\frac{2}{3}$ не се решенија на почетната равенка.

За равенката (б) наоѓаме:

$$x-3=2x-3 \qquad\qquad x-3=-2x+3$$

$$x=0 \qquad\qquad x=2$$

Бидејќи само бројот $2 \in [1,+\infty)$, за него, со проверка, се убедуваме дека е решение на дадената равенка.

Следствено, множеството решенија на почетната равенка $M=\{2\}$.

6. Системи равенки.

На крајот од овој напис ќе покажеме како се решаваат системи од две равенки со две непознати, при што барем во една од равенките имаме непозната и под знакот на апсолутна вредност.

Пример 10. *Реши го системот равенки* $\begin{cases} x+y=1 \\ |x|+|y|=5. \end{cases}$

Решение. Од првата равенка имаме $y=1-x$. Заменувајќи го овој израз за y во втората равенка добиваме:

$$|x|+|1-x|=5, \text{ т.е. } |x-1|+|x|=5.$$

Решенијата на оваа равенка се: $x_1=-2$, $x_2=3$. Од смената наоѓаме: $y_1=3$, $y_2=-2$.

Следствено, решение на системот се подредените парови: $(-2,3)$ и $(3,-2)$.

Пример 11. *Реши го системот* $\begin{cases} |x+1|+|y-1|=5 \\ |x+1|=4y-4. \end{cases}$

Решение. Првата равенка, имајќи предвид дека $|x+1|=4y-4$, го добива видот

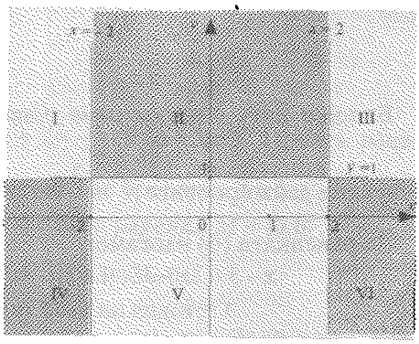
$$4y-4+|y-1|=5, \text{ т.е. } |y-1|=-4y+9,$$

од каде што $y=2$. Заменувајќи ја оваа вредност за y во една од равенките на системот, добиваме: $|x+1|=4$, од каде што: $x_1=-5$, $x_2=3$.

Следствено, множеството решенија на системот е $\{(-5,2),(3,2)\}$.

Пример 12. Реши го системот равенки $\begin{cases} |x+2|+|y-1|=8 \\ |x-2|=3y-3. \end{cases}$

Решение. Забележуваме дека во двете равенки немаме исти изрази под знакот на апсолутна вредност, па системот ќе го решиме со т.н. **метод на квадранти**. За: $x=-2$, $x=2$, $y=1$ се анализираат изразите под знакот на апсолутна вредност. Тоа значи дека правите: $x=-2$, $x=2$, $y=1$ ја делат рамнината на шест квадранти (црт. 2). Во секој од овие квадранти изразите: $x+2$, $x-2$, $y-1$ имаат различни знаци. Затоа дадениот систем го решаваме во секој од овие квадранти:



Црт. 2

I) За $x < -2$ и $y \geq 1$ го добиваме системот:

$$\begin{cases} -(x+2)+(y-1)=8 \\ -(x-2)=3y-3 \end{cases} \text{ т.е. } \begin{cases} -x+y=11 \\ -x-3y=-5, \end{cases}$$

чие решение, подредената двојка $(-7,4)$ ги задоволува условите $-7 < -2$ и $4 \geq 1$. Следствено, подредената двојка $(-7,4)$ е решение и на почетниот систем.

II) За $-2 \leq x < 2$ и $y \geq 1$ го имаме системот , чие решение, подредената двојка $(8,-1)$ не припаѓа на вториот квадрант $(-1 \ngeq 1)$.

Продолжувајќи ја постапката на сличен начин, наоѓаме уште едно решение - подредената двојка $(5,2)$, кое припаѓа во третиот квадрант.

Конечно, множеството решенија на системот $M = \{(-7,4),(5,2)\}$.

7. Задачи за вежбање.

1. Реши ја равенката:

а) $|2x-3|+x=3$;
б) $2\sqrt{x^2-2x+1}=(x-1)^2-3$;
в) $|x-1|+|x+2|-|x-3|=4$;
г) $||x-3|-3|+2x=3$;
д) $|2-|1-|x|||=1$;
ѓ) $||x|+|x+2||=2$.

2. Реши го системот равенки:

а) $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 3|x|-|y-1|=3 \end{cases}$;
б) $\begin{cases} |x|+|y|=3 \\ 2|x|+3|y|=6 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} |x+y|=1 \\ |x|+|y|=1 \end{cases}$;
г) $\begin{cases} |x-2|+|y-1|=8 \\ |x+3|=2y+3 \end{cases}$.

Одговори.

1. а) $\{0,2\}$; б) $\{-2,4\}$; в) $\{-8,2\}$; г) $\{1\}$; д) $\{-4,-2,0,2,4\}$; ѓ) $[-2,0]$.

2. а) $\left\{(-7,-17),\left(\frac{7}{5},-\frac{1}{5}\right)\right\}$; б) $\{(3,0),(-3,0)\}$;

в) $\{(t,1-t) \mid t\in[0,1]\} \cup \{(t,-1-t) \mid t\in[-1,0]\}$; г) $\left\{(-4,-1),\left(\frac{22}{3},\frac{11}{3}\right),\left(-\frac{10}{3},-\frac{4}{3}\right)\right\}$.