

Регионален натпревар 1989

I година

1. Возот влегол во тунел за 15 секунди. До излегувањето од тунелот на последниот вагон поминале уште 30 секунди. Колку е долг возот и со која брзина се движел, ако тунелот е долг 300 m .

Решение. Брзината на возот е 10 m/s , а неговата должина е 150 m .

2. Дадени се рамнината Σ и правите a и b , кои не лежат во Σ . Низ секоја од правите a и b да се повлече рамнина, така што двете рамнини да се различни и правата во која се сечат да лежи во Σ .

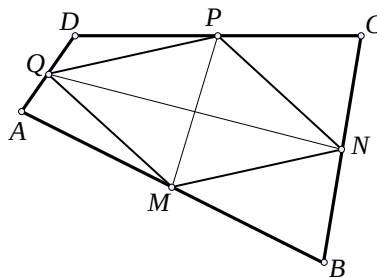
Решение. Нека a и b се меѓусебно паралелни прави и нека Π е рамнина во која лежат правите a и b . Ако M е произволна точка од Σ и не лежи во Π , тогаш бараните рамнини Σ_1 и Σ_2 се определени со M и a односно M и b .

Нека правите a и b се сечат во точката P . Ако P лежи во Σ , тогаш бараните рамнини се произволни рамнини Σ_1 и Σ_2 низ правите a и b соодветно; ако, пак, P не лежи во Σ , тогаш таквите рамнини не постојат.

Нека правите a и b се разминувачки. Ако тие се паралелни со Σ , тогаш такви рамнини не постојат; ако $a \cap \Sigma = A$, $b \parallel \Sigma$, тогаш бараните рамнини се произволна рамнина Σ_1 низ правата a и рамнината Σ_2 определена со A и b ; ако $a \cap \Sigma = A$, $b \cap \Sigma = B$, тогаш бараните рамнини се рамнините Σ_1 и Σ_2 определени со A и b односно со B и a .

3. Нека точките M, N, P и Q се соодветно средини на страните AB, BC, CD и DA на четириаголникот $ABCD$. Ако $MN \perp NQ$ тогаш $\overline{AC} = \overline{BD}$. Докажи!

Решение. Четириаголникот $MNPQ$ (види цртеж) е паралелограм на кој дијагоналите MP и NQ се заемно нормални, па тој е ромб. Значи, $\overline{MN} = \overline{MQ}$. Но $\overline{AC} = 2\overline{MN}$, $\overline{BD} = 2\overline{MQ}$, па $\overline{AC} = \overline{BD}$.



4. На излет биле 4 момчиња и 4 девојчиња. Познато е дека секое момче е брат на едно девојче, т.е. дека има четири пара браќа и сестри од четири различни семејства, и познати се имињата и презимињата на девојчињата и момчињата соодветно. На излетот изеле 32 колачи и тоа: Марија 1 колач, Јованка 2 колачи,

Иванка 3 колачи и Ана 4 колачи. Момчињата изеле: Петрески колку и неговата сестра, Маркоски двапати повеќе од својата сестра, Попоски трипати повеќе од својата сестра и Павлоски четири пати повеќе од својата сестра. Како гласат имињата и презимињата на девојчињата.

Решение. Девојчињата со презимиња Петреска, Маркоска, Попеска и Павлоска нека изеле a, b, c и d колачи соодветно. Тогаш братот и сестрата Петрески изеле $2a$ колачи, Маркоски $3b$ колачи, Попоски $4c$ колачи и Павлоски $5d$ колачи. Притоа, $a, b, c, d \leq 4$ и $2a + 3b + 4c + 5d = 32$, од каде следува дека b и d се и двата се парни или и двата се непарни броеви. Значи, имаме четири можности: $b=1, d=3$; $b=3, d=1$; $b=2, d=4$ и $b=4, d=2$. Лесно се проверува дека е возможен само случајот $b=4, d=2, a=3, c=1$.

Следователно, девојчињата се: Иванка Петреска, Ана Маркоска, Марија Попоска и Јованка Павлоска.

II година

1. Да се пресмета $\frac{(1+i)^{1989}}{(1-i)^{1989} - (1+i)^{1989}} \quad (i^2 = -1)$.

Решение. Бидејќи

$$(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 1+2i-1 = 2i \text{ и } (1-i)^2 = 1-2i+i^2 = 1-2i-1 = -2i,$$

имаме

$$(1+i)^{1989} = (1+i)^{1989} (1+i) = (2i)^{994} (1+i) = 2^{994} (i^2)^{497} (1+i) = -2^{994} (1+i)$$

а слично и $(1-i)^{1989} = -2^{994} (1-i)$. Користејќи ги овие равенства, добиваме

$$\frac{(1+i)^{1989}}{(1-i)^{1989} - (1+i)^{1989}} = \frac{-2^{994} (1+i)}{-2^{994} (1-i) + 2^{994} (1+i)} = \frac{-(1+i)}{-(1-i) + (1+i)} = \frac{-(1+i)}{2i} = \frac{-(1+i)i}{-2} = \frac{i-1}{2}.$$

2. За кои вредности на параметарот a разликата од корените на равенката

$$2x^2 - (a+1)x + (a-1) = 0$$

е еднаква на нивниот производ?

Решение. Нека x_1 и x_2 се корените на дадената равенка. Според Виетовите формули имаме

$$x_1 + x_2 = \frac{a+1}{2}, \quad x_1 x_2 = \frac{a-1}{2}.$$

По услов од задачата имаме $x_1 - x_2 = x_1 x_2$, па, решавајќи го системот

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{a+1}{2} \\ x_1 - x_2 = \frac{a-1}{2} \end{cases},$$

добиваме $x_1 = \frac{a}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$. Ако едниот од овие корени го замениме во равенката, добиваме $a = 2$.

3. Во множеството комплексни броеви да се реши равенката

$$(x-1)(x-2)(x-4)(x-5) = 40.$$

Решение. Бидејќи

$$(x-1)(x-5) = x^2 - 6x + 5, \quad (x-2)(x-4) = x^2 - 6x + 8,$$

равенката добива облик

$$(x^2 - 6x + 5)(x^2 - 6x + 8) = 40.$$

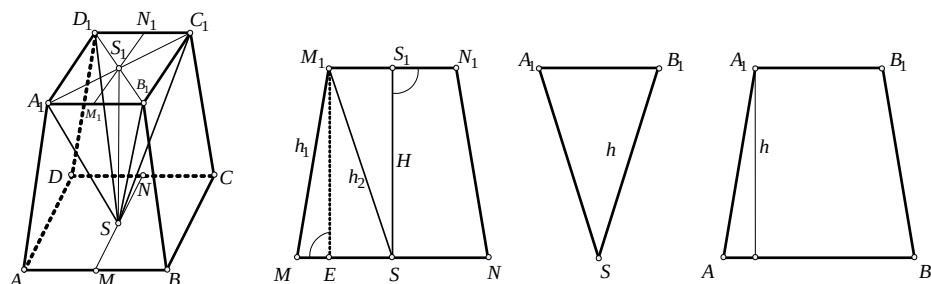
Ставајќи $x^2 - 6x + 5 = y$, ја добиваме равенката $y(y+3) = 40$ чии решенија се $y_1 = 5$ и $y_2 = -8$. Решавајќи ги сега равенките

$$x^2 - 6x + 5 = 5, \quad x^2 - 6x + 5 = -8,$$

ги добиваме корените на дадената равенка: $x_1 = 0$, $x_2 = 6$, $x_3 = 3 + 2i$, $x_4 = 3 - 2i$.

4. Во една правилна четиристрана пресечена пирамида да се впише пирамида, земајќи го за основа горниот квадрат, а за теме центарот на долниот квадрат. Страните на квадратите се: на долниот a , на горниот b . Колку изнесува висината на пирамидата, ако бочните плоштини на двете пирамиди се еднакви? (Да се утврди при кои услови задачата има решение.)

Решение. Нека M, N, M_1 и N_1 се средини на рабовите AB, CD, A_1B_1 и C_1D_1 соодветно (види цртеж). Тогаш четириаголникот MNM_1N_1 е трапез со основи $\overline{MN} = a$ и $\overline{M_1N_1} = b$. Се бара висината $H = \overline{SS_1}$ на овој трапез. Нека $\overline{MM_1} = h_1$, $\overline{M_1S} = h_2$. За бочните плоштини P_1 и P_2 на дадената пирамида и впишаната соодветно, ќе имаме:



$$P_1 = \frac{4(a+b)}{2} h_1 = 2(a+b)h_1, \quad P_2 = \frac{4bh_2}{2} = 2bh_2.$$

Од $P_1 = P_2$ добиваме

$$2(a+b)h_1 = bh_2. \quad (1)$$

Од правоаголникот триаголник MEM_1 (види цртеж) имаме

$$H^2 = h_1^2 - \frac{(a-b)^2}{4},$$

а од правоаголникот триаголник SS_1M_1 имаме

$$H^2 = h_2^2 - \frac{b^2}{4}.$$

Значи,

$$h_1^2 - \frac{(a-b)^2}{4} = h_2^2 - \frac{b^2}{4},$$

т.е.

$$4h_2^2 = 4h_1^2 - a^2 + 2ab. \quad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме

$$h_1^2 = \frac{b^2(2b-a)}{4(2b+a)}$$

па

$$H^2 = \frac{b^2(2b-a)}{4(2b+a)} - \frac{(a-b)^2}{4} = \frac{a(2b^2-a^2)}{4(2b+a)}.$$

Задачата има решение ако и само ако $2b^2 - a^2 > 0$, т.е. $a < b\sqrt{2}$.

III година

1. Определи ги сите вредности на параметарот m , така што за секој x важи

$$(4m^2 - 5m + 1)x^2 + 2(m+1)x + 1 > 0. \quad (1)$$

Решение. Неравенството $ax^2 + bx + c > 0$ важи за секој реален број x ако и само ако $a > 0$ и $D = b^2 - 4ac < 0$. Во нашиов случај

$$a = 4m^2 - 5m + 1 = (m-1)(4m-1)$$

$$D = 4(m+1)^2 - (4m^2 - 5m + 1) = 4m(-3m+7).$$

Од $a > 0$ следува дека $m \in (-\infty, -\frac{1}{4}) \cup (1, +\infty)$, а од $D < 0$, пак, следува дека $m \in (-\infty, 0) \cup (\frac{7}{3}, +\infty)$, т.е. важи неравенството (1) за секој реален број x ако и само ако $m \in (-\infty, 0) \cup (\frac{7}{3}, +\infty)$

2. Да се докаже идентитетот

$$\frac{1+\sin 2\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} - \frac{1-\operatorname{tg}^2 \alpha}{1+\operatorname{tg}^2 \alpha} = \sin \alpha. \quad (1)$$

Решение. За левата страна L на (1) имаме:

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} - \frac{1 - \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}}{1 + \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}} \\
 &= \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}{\sin \alpha + \cos \alpha} - \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \\
 &= \sin \alpha + \cos \alpha - \cos \alpha = \sin \alpha.
 \end{aligned}$$

3. За кои реални броеви x и y важи равенството

$$4x^2 + 12x \sin(xy) + 9 = 0?$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}
 4x^2 + 12x \sin(xy) + 9 &= 4x^2 + 12x \sin(xy) + 9 \sin^2(xy) - 9 \sin^2(xy) + 9 \\
 &= (2x + 3 \sin(xy))^2 + 9 \cos^2(xy)
 \end{aligned}$$

па дадената равенка ја запишуваме во обликот

$$(2x + 3 \sin(xy))^2 + 9 \cos^2(xy) = 0.$$

Од последната равенка следува дека $2x + 3 \sin(xy) = 0$ и $\cos(xy) = 0$. Од втората равенка добиваме: $xy = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, па заменувајќи во првата равенка ќе имаме $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{3}{2}$, и соодветно $y_1 = -\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$, $y_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. Околу топка со радиус R е опишан пресечен конус при кој плоштината на едната основа е четирипати поголема од плоштината на другата основа. Да се пресмета волуменот на пресечениот конус.

Решение. Од условот $P_1 = 4P_2$ добиваме дека $r_1 = 2r_2$. Триаголниците ABC и EFC се слични, па имаме $r_1 : r_2 = (h + 2R) : R$. Исто така, триаголниците CEF и CDO се слични, па имаме $r_2 : R = h : \overline{CD}$. Од триаголникот $ACDO$ добиваме $\overline{CD} = \sqrt{2Rh + h^2}$. Значи, ги добиваме равенствата:

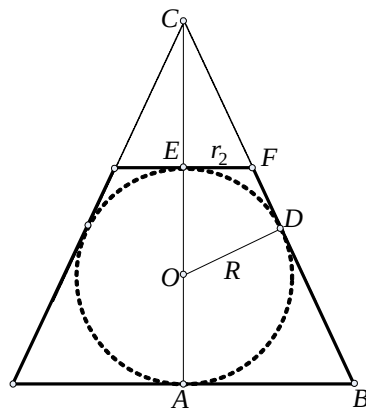
$$r_1 = 2r_2, \quad r_1 R = r_2 (h + 2R), \quad r_2 \sqrt{2Rh + h^2} = hR,$$

од каде што следува дека: $h = 2R$, $r_2 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$,

$$r_1 = R\sqrt{2}.$$

Следствено, за волуменот V на пресечениот конус добиваме:

$$V = \frac{2R\pi}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) = \frac{7R^3\pi}{3}.$$



IV година

1. Колку природни броеви меѓу 1000 и 3000 може да се формираат од цифрите 1, 2, 3, 4, 5 ако:

- а) е дозволено повторување на цифрите;
- б) не е дозволено повторување на цифрите?

Решение. Според условот на задачата, треба да се најде бројот на сите четирицифрени броеви $\overline{abcd}$, каде што $a = 1$ или $a = 2$, $a, b, c, d \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, т.е. доволно е да го најдеме бројот на сите трицифрени броеви $\overline{bcd}$, каде што $b, c, d \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ во двата случаја.

а) Бројот на сите трицифрени броеви од цифрите 1, 2, 3, 4, 5 каде што е дозволено повторување на цифрите, се совпаѓа со бројот V_5^3 од сите варијации со повторување од класа 3 над множество од 5 елементи. Тој број е $V_5^3 = 5^3$, па постојат точно $2 \cdot 5^3 = 250$ природни броеви со бараното својство.

б) Ако не е дозволено повторување на цифрите, тогаш бројот на сите трицифрени броеви од цифрите 2, 3, 4, 5 (1, 3, 4, 5) е еднаков на $(\frac{4}{3})3! = 4!$. Значи, бараниот број е $2 \cdot 4! = 48$.

2. Да се докаже дека еден триаголник е остроаголен ако и само ако за аглиите α, β и γ на триаголникот се исполнети неравенствата

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta > 1,$$

$$\operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma > 1,$$

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma > 1.$$

Решение. Нека претпоставиме дека триаголникот ABC е остроаголен, т.е. дека $\alpha < 90^\circ$, $\beta < 90^\circ$ и $\gamma < 90^\circ$. Тогаш $\cos \gamma > 0$, па

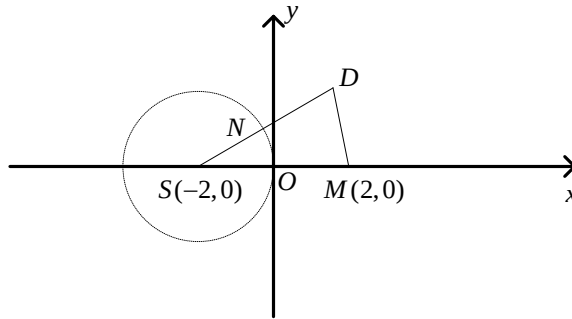
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(180^\circ - \gamma) = -\cos \gamma < 0,$$

т.е. $\cos \alpha \cos \beta < \sin \alpha \sin \beta$, од каде што поради $\cos \alpha > 0$, $\cos \beta > 0$, добиваме дека $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta > 1$.

Обратно, да претпоставиме дека $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta > 1$. Ќе докажеме дека $\gamma < \frac{\pi}{2}$. Од $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta > 1$ следува дека $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta > 0$, т.е. $\operatorname{tg} \alpha > 0$ и $\operatorname{tg} \beta > 0$ (еден триаголник не може да има два тапи агли). Значи, $\alpha < 90^\circ$ и $\beta < 90^\circ$, т.е. $\cos \alpha > 0$ и $\cos \beta > 0$. Според тоа, неравенството $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta > 1$ можеме да го напишеме во обликот $\sin \alpha \sin \beta > \cos \alpha \cos \beta$, т.е. $\cos(\alpha + \beta) < 0$, па $\cos \gamma > 0$. Следствено, $\gamma < 90^\circ$.

3. Да се најде геометриското место на на точките $P(u, v)$ кои се еднакво оддалечени од кривата $x^2 + 4x + y^2 = 0$ и од точката $M(2, 0)$.

Решение. Кривата $x^2 + 4x + y^2 = 0$ е кружница со центар $S(-2, 0)$ и радиус 2 (види цртеж). Ако $N(x, y)$ е произволна точка од кружницата, тогаш според условот на задачата, имаме $\overline{NP} = \overline{MP}$, $\overline{SP} = \overline{SN} + \overline{NP} = 2 + \overline{MP}$. Бидејќи



$$\overline{SP}^2 = (u+2)^2 + v^2, \quad \overline{MP}^2 = (u-2)^2 + v^2,$$

заменувајќи во второто равенство на (1), добиваме

$$\sqrt{(u+2)^2 + v^2} = 2 + \sqrt{(u-2)^2 + v^2},$$

т.е. $u^2 - \frac{v^2}{3} = 1$.

Следствено, бараното геометриско место на точки е хипербола.

4. Ако $a > b > c > d > 0$ и a, b, c, d се четири последователни членови на аритметичка прогресија, тогаш

$$a^n + d^n > b^n + c^n.$$

Докажи!

Решение. Од $a > b > c > d$ следува неравенството

$$a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1} > c^{n-1} + c^{n-2}d + \dots + d^{n-1}. \quad (1)$$

Бидејќи, пак, a, b, c, d се последователни членови на аритметичка прогресија и $a > b > c > d$, следува дека

$$a - b = c - d > 0. \quad (2)$$

Од (1) и (2) го добиваме неравенството

$$(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}) > (c-d)(c^{n-1} + c^{n-2}d + \dots + d^{n-1})$$

$$a^n - b^n > c^n - d^n.$$