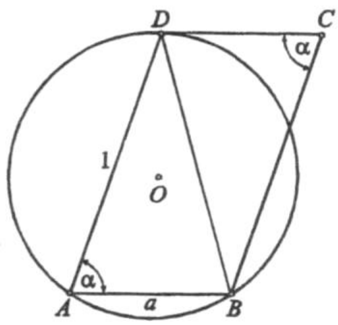
IX олимпијада

1. Во паралелограмот $ABCD$ триаголникот ABD е остроаголен. Нека $\overline{AB}=a$, $\overline{AD}=1$ и $\measuredangle DAB=\alpha$. Докажи дека кружниците K_A, K_B, K_C и K_D со радиус 1 и центри во A, B, C и D соодветно, го покриваат паралелограмот ако и само ако

$$a\leq \cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha .$$

Решение. Околу остроаголниот триаголник ABD опишуваме кружница, со центар во точката O која е во внатрешноста на триаголникот.
Ако точката C е внатре во кружницата, на спротивната страна на правата BD од точката A, тогаш $\measuredangle BCD\geq \pi-\alpha>\frac{\pi}{2}$, што противречи на претпоставката дека $\measuredangle DAB=\measuredangle BCD<\frac{\pi}{2}$. Значи, темето C е надвор од кружницата.
Сега ќе докажеме дека ако кружниците K_A,K_B,K_C и K_D го покриваат целиот паралелограм, тогаш радиусот на опишаната кружница околу триаголникот ABD не е поголем од 1. Нека претпоставиме дека $R=\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OD}>1$. Тогаш, кружниците K_A,K_B и K_D не ја покриваат точката O. Кружницата K_C исто така не ја покрива точката O, бидејќи $\overline{OC}>R>1$. Затоа $R\leq 1$.



Нека $R\leq 1$. Од точката O повлекуваме нормали на страните на $\triangle ABD$ кои го делат $\triangle ABD$ на шест правоаголни триаголници, со должини на хипотенузи R. Оддалеченоста на секоја точка од триаголникот до најблиското негово теме не е поголема од должината на хипотенузата на шесте правоаголни триаголници на кој е разбиен триаголникот. Значи, за секоја точка M од $\triangle ABD$, постои теме на триаголникот кое е оддалечено од неа на растојание помало или еднакво на R. Затоа кружницата со центар во тоа теме и радиус R ја покрива точката M. Според тоа $\triangle ABD$ е покриен со кружниците K_A,K_B и K_D. На ист начин се покажува дека $\triangle BCD$ е покриен со кружниците K_B,K_C и K_D.
Значи, кружниците K_A,K_B,K_C и K_D го покриваат целиот паралелограм ако и само ако $R\leq 1$.
Ќе докажеме дека потребен и доволен услов за да кружниците K_A,K_B,K_C и K_D го покриваат паралелограмот е да е исполнето неравенството од условот на задачата.

Од $\overline{AD}=1$, $\overline{AB}=a$, $\measuredangle DAB=\alpha$, со примена на косинусната теорема добиваме

$$\overline{BD}=\sqrt{1+a^2-2a\cos\alpha}\,.$$

Понатаму, од

$$R=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{BD}}{4P}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{BD}}{2\overline{AB}\cdot\overline{AD}\sin\alpha} \text{ и } R\le 1$$

добиваме

$$\frac{\sqrt{1+a^2-2a\cos\alpha}}{2\sin\alpha}\le 1\,.$$

Решението на последната неравенка е

$$\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha\le a\le\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha\,.$$

Левата страна на неравенството е исполнета бидејќи

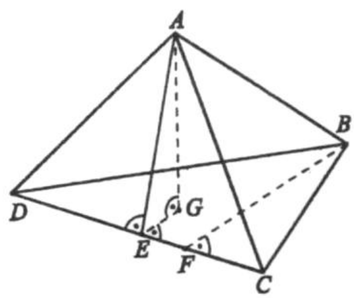
$$a=\overline{AB}>\overline{AD}\cos\alpha=\cos\alpha\,,\quad \overline{AD}=1$$

и $\triangle ABD$ е остроаголен. Според тоа, $\triangle ABD$ можеме да го покриеме со кружници K_A, K_B, K_D ако и само ако

$$a\le\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha\,.$$

2. Даден е тетраедар во кој должината на точно еден раб е поголема од 1. Докажи дека неговиот волумен е помал или еднаков на $\frac{1}{8}$.

Решение. Нека AB е работ со најголема должина, а AG е висина на тетраедарот (цртеж десно). Според тоа, должините на страните на триаголниците ACD и BCD не се поголеми од 1. Нека нивните висини се AE и BF. Должината на работ CD ја означуваме со x. Точката E ја дели отсечката CD на два дела од кои еден дел, на пример CE, има должина која не е помала од $\frac{x}{2}$. Тогаш



$$\overline{AE}^2=\overline{AC}^2-\overline{CE}^2\le 1-(\tfrac{x}{2})^2,$$

$$\overline{AG}\le\overline{AE}\le\sqrt{1-\tfrac{x^2}{4}}\,.$$

Исто така

$$\overline{BF}\le\sqrt{1-\tfrac{x^2}{4}}\,.$$

Волуменот на тетраедарот е

$$V=\tfrac{1}{3}P_{BCD}\cdot\overline{AG}\le\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}x(1-\tfrac{x^2}{4})=\tfrac{1}{24}x(4-x^2)\,.$$

Доволно е да докажеме дека $y = x(4-x^2) \le 3$. Од $y' = 4-3x^2 > 0$, кога $0 < x < 1$ следува дека функцијата $y = x(4-x^2)$ е растечка на интервалот $[0,1]$, па затоа $y \le y(1) = 3$.

Останува да докажеме дека постои тетраедар со волумен $\frac{1}{8}$, кој ги исполнува условите на задачата. Нека $\overline{AC} = \overline{CD} = \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{BD} = 1$ и рамнината ACD е нормална на BCD. Тогаш

$$\overline{AB} = \sqrt{\tfrac{3}{4}+\tfrac{3}{4}} = \sqrt{\tfrac{3}{2}} > 1,$$

а волуменот е

$$V = \tfrac{1}{24}\cdot 1\cdot(4-1^2) = \tfrac{1}{8}.$$

3. Нека $k,m,n \in \mathbb{N}$ се такви што $m+k+1$ е прост број поголем од $n+1$. Ако $C_s = s(s+1)$, докажи дека производот

$$(C_{m+1}-C_k)(C_{m+2}-C_k)...(C_{m+n}-C_k)$$

е делив со производот $C_1C_2...C_n$.

Решение. Од дефиницијата на C_s добиваме

$$C_p - C_q = p^2 + p - q^2 - q = (p-q)(p+q+1).$$

Со примена на овој идентитет дадениот производ можеме да го запишеме во обликот

$$\begin{aligned}
&(C_{m+1}-C_k)(C_{m+2}-C_k)...(C_{m+n}-C_k) = \\
&\quad = (m+1-k)(m+1+k+1)\cdot(m+2-k)(m+2+k+1)....(m+n-k)(m+n+k+1) \\
&\quad = [(m-k+1)(m-k+2)...(m-k+n)]\cdot[(m+k+2)(m+k+3)...(m+k+n+1)] \\
&\quad = A.
\end{aligned}$$

Од друга страна

$$C_1C_2...C_n = 1\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 4\cdot 4\cdot ...\cdot n\cdot(n+1) = n!(n+1)! = B.$$

Според тоа, доволно е да се докаже дека

$$\begin{aligned}
\frac{A}{B} &= \frac{[(m-k+1)(m-k+2)...(m-k+n)]}{n!}\cdot\frac{[(m+k+2)(m+k+3)...(m+k+n+1)]}{(n+1)!} \\
&= \binom{m-k+n}{n}\binom{m+k+n+1}{n+1}\frac{1}{m+k+1}.
\end{aligned}$$

е природен број. Значи, доволно е да докажеме дека производот

$$\binom{m+k+n+1}{n+1}\frac{1}{m+k+1}$$

е природен број. Навистина, биномниот коефициент $\binom{m+k+n+1}{n+1}$ е делив со $m+k+1$, бидејќи $m+k+1$ е прост број поголем од $n+1$, па затоа е и заемно прост со $(n+1)!$.

4. Дадени се остроаголни триаголници $A_0B_0C_0$ и $A_1B_1C_1$. Конструирај $\triangle ABC$ кој е сличен со $\triangle A_1B_1C_1$ и е опишан околу $\triangle A_0B_0C_0$, таков што $C_0 \in AB$, $A_0 \in BC$, , $B_0 \in CA$. Конструирај го триаголникот со наведените својства кој има максимална плоштина.

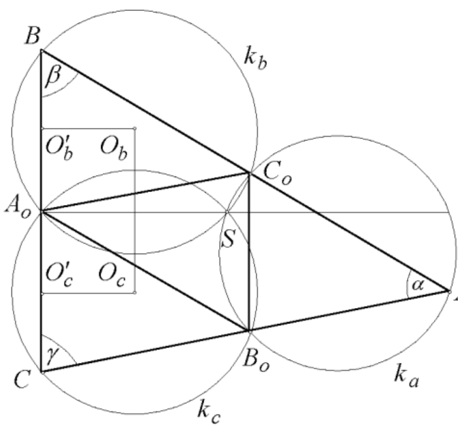
Решение. Бараниот триаголник ABC ги задоволува условите:

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1, \tag{1}$$

$$A_0 \in BC, \quad B_0 \in CA, \quad C_0 \in AB. \tag{2}$$

Темињата на бараниот триаголник, A, B и C се наоѓаат на кружните лаци од кои отсечките B_0C_0, C_0A_0 и A_0B_0 се гледаат соодветно под острите агли α, β и γ кои се али на триаголникот $A_1B_1C_1$. Бидејќи сите триаголници ABC на кои темињата им се наоѓаат на овие кружни лаци и кои го задоволуваат вториот услов се слични меѓу себе, најголема плоштина ќе има оној кој има најголеми должини на страни. Ќе докажеме дека таков триаголник постои.

Нека ABC е триаголник кој ги задоволува условите (1) и (2). Ако постои барем еден таков триаголник, точките B и C мора да бидат на различни страни од точката A_0. Нека O_b и O_c се центри на кружниците k_b и k_c кои соодветствуваат на аглите β и γ. Јасно, кружниците k_a, k_b и k_c се сечат во точка S која е во внатрешноста на триаголникот



$A_0B_0C_0$, што следува од $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, и фактот дека страните на триаголникот $A_0B_0C_0$ од секоја внатрешна точка се гледаат под тапи агли чиј збир е 360°. Нека O_b' и O_c' се ортогонални проекции на центрите O_b и O_c на кружниците k_b и k_c на правата BC. Бидејќи проекцијата на центарот на кружница ја полови тетивата, добиваме дека

$$\overline{BC} = \overline{BA_0} + \overline{A_0C} = 2\overline{O_b'A_0} + 2\overline{A_0O_c'} = 2\overline{O_b'O_c'}.$$

Според тоа, отсечката BC ќе има најголема должина кога проекцијата $O_b'O_c'$ е најголема, а тоа е кога $BC \parallel O_bO_c$, т.е. кога $\overline{O_bO_c} = \overline{O_b'O_b'}$. Треба уште да докажеме дека правата паралелна со O_bO_c ги сече кружниците k_b и k_c во точки B и C кои се на различна страна од точката A_0. Доволно е да

докажеме дека точките O_b и O_c се на различна страна во однос на отсечката SA_0 (која им е заедничка тетива). Аглите над SA_0 кај кружниците k_b и k_c се остри (тие се помали од острите агли β и γ, а аголот $\measuredangle C_0A_0B_0$ е остар по претпоставка). Од ова следи претходното тврдење.
Од досега изнесеното следува конструкцијата на бараниот триаголник. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

5. Дадена е низата $\{C_n\}$, определена со

$$C_1 = a_1 + a_2 + ... + a_8$$
$$C_2 = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_8^2$$
$$................................$$
$$C_n = a_1^n + a_2^n + ... + a_8^n$$
$$................................$$

каде $a_1, a_2, ..., a_8$ се реални броеви не сите еднакви на нула. Меѓу членовите на оваа низа постојат бесконечно многу кои се еднакви на нула. Определи ги сите природни броеви n за кои $C_n = 0$.

Решение. Бидејќи броевите $a_1, a_2, ..., a_8$ не се сите еднакви на нула, броевите $c_n = a_1^n + a_2^n + ... + a_8^n$ за $n = 2k$ се позитивни. Значи, c_n може да биде нула само за непарни индекси.
Ќе докажеме дека, ако меѓу броевите $c_{2n-1}, n \in \mathbb{N}$ има бесконечно многу кои се еднакви на нула, тогаш сите тие се еднакви на нула. Ќе докажеме дека тврдењето важи за парен број на собирци во членовите на низата (не мора да се 8).
Нека $a = \max\limits_{1 \le i \le 2k} |a_i|$. Понатаму, нека меѓу броевите a_i има точно p кои се позитивни и се еднакви на a и точно q кои се негативни и се еднакви на $-a$.
Нека $p \neq q$. Тогаш

$$c_{2n-1} = (p-q)a^{2n-1} + c'_{2n-1} \qquad (1)$$

каде c'_{2n-1} е збирот на преостанатите собирци. Максимумот на апсолутните вредности на овие броеви, кои ги има r е $b < a$. Тогаш

$$|c_{2n-1}| \geq |p-q|\, a^{2n-1} - rb^{2n-1}. \qquad (2)$$

Бидејќи $a > b$, за $2n-1 > \log_{\frac{a}{b}} \frac{r}{|p-q|}$ исполнето е $|c_{2n-1}| > 0$.

Според тоа, ако $p \neq q$ тогаш сите c_n по некој n се различни од нула, што е спротивно на претпоставката. Затоа мора да е исполнет условот $p = q$.
Значи, броеви a_i со апсолутна вредност a, ги има парен број и тие се појавуваат во парови, позитивен и негативен. Затоа, во сите збирови c_{2n-1} тие се

поништуваат. Преостанатиот дел од збирот има парен број на собирци, кој е помал од $2k$, па продолжувајќи ја постапката по конечен број на чекори добиваме дека броевите a_i се појавуваат во парови, позитивен и негативен, па затоа нивнит непарни степени се поништуваат.
Конечно, $c_{2n-1}=0$ за секој $n\in\mathbb{N}$.

6. На натпревар кој траел n денови, се доделени m медали. Првиот ден се доделени еден медал и $\frac{1}{7}$ од преостанатите $m-1$ медали. Вториот ден се доделени два медала и уште $\frac{1}{7}$ од преостанатите (до тогаш) медали, итн. Конечно $n-$тиот ден се доделени преостанатите n медали. Колку денови траел натпреварот и колку медали се доделени?

Решение. Со x_k да го означиме бројот на медалите доделени k-тиот ден. Имаме

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1+\tfrac{1}{7}(m-1),\\
x_2 &= 2+\tfrac{1}{7}(m-x_1-2),\\
x_3 &= 3+\tfrac{1}{7}(m-x_1-x_2-3),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
x_{n-1} &= n-1+\tfrac{1}{7}(m-x_1-x_2-\dots-x_{n-2}-(n-1)),\\
x_n &= n.
\end{aligned}$$

Со помош на претходните рекурзивни формули добиваме

$$x_{k+1}-x_k=1-\tfrac{1}{7}(x_k+1).$$

Последната формула за $1\le k\le n-2$ ја запишуваме во обликот

$$x_{k+1}-6=\tfrac{6}{7}(x_k-6),$$

што значи дека x_k-6 се членови на геометриска прогресија со коефициент $\frac{6}{7}$, па затоа

$$x_{k+1}=\frac{6^k}{7^k}(x_1-36)+6,$$

и ако ја замениме вредноста за x_1 добиваме

$$x_{k+1}=\frac{6^k}{7^{k+1}}(m-36)+6,\ \ 0\le k\le n-2$$

(за $k=0$ точноста на формулата се проверува непосредно).
Од последната формула следува

$$x_1+x_2+\dots+x_{n-1}=6(n-1)+(1-\frac{6^{n-1}}{7^{n-1}})(m-36).$$

Сега од $x_n=n$ и $x_1+x_2+\dots+x_n=m$ следува

$$m = x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + x_n = 6(n-1) + (1 - \frac{6^{n-1}}{7^{n-1}})(m-36) + n.$$

Од овде следува

$$7^n(n-6) = 6^{n-1}(m-36) \Rightarrow \frac{n-6}{6^{n-1}} = \frac{m-36}{7^n}.$$

Бидејќи броевите 6 и 7 се заемно прости, за да важи последното равенство треба и на левата и на десната страна да се цели броеви. Но, ако $n > 6$, тогаш со индукција лесно се докажува дека $n - 6 < 6^{n-1}$, а ако $n = 1, 2, ..., 5$, тогаш $\frac{n-6}{6^{n-1}}$ не е цел број, па затоа единствена можност е $n = 6$. Во овој случај $m - 36 = 0$, т.е. $m = 36$. Според тоа, натпреварот траел 6 дена и се поделени 36 медали и тоа по 6 секој ден.