JMMO 2008

1. Даден е 3×3 квадрат поделен на 9 квадратчиња и во секое квадратче е запишан цел број, така што збировите на елементите во секоја редица, секоја колона и секоја дијагонала се еднакви. Докажи дека овој збир не може да биде еднаков на 2008.

   Решение. Нека збирот на секоја редица и колона е m. Тогаш еден магичен квадрат мора да го има следниов облик:

x	y	$m-x-y$
a	b	$m-a-b$
$m-x-a$	$m-b-y$	$x+a+b+y-m$

   Бидејќи и сумата на елементите на дијагоналите мора да е m, добиваме:

$$\begin{cases} x+b+x+a+b+y-m=m \\ m-x-a+b+m-x-y=m. \end{cases}$$

   т.е.

$$\begin{cases} 2x+a+y+2b=2m \\ 2x+a+y-b=m. \end{cases}$$

   Со одземање на равенствата, се добива:

$$2b+b=2m-m$$

   односно $3b=m$, од каде $3\,|\,m$. Но, 3 не е делител на 2008, од каде добиваме дека 2008 не може да биде бараната сума.

2. Нека S е подмножество од $\{1,2,...,9\}$, такво што збировите на секои два елементи од S се различни. На пример множеството $\{1,2,3,5\}$ има такво својство, но множеството $\{1,2,3,4,5\}$ не, бидејќи $\{2,3\}$ и $\{1,4\}$ имаат збир 5. Колку најмногу елементи може да содржи S?

   Решение. Лесно се проверува дека $\{1,2,3,5,8\}$ го задоволува условот на задачата.

   Ќе докажеме дека S не може да содржи повеќе од 5 елементи.

   Нека S содржи барем шест елементи. Тогаш најмалиот можен збир на паровите е 3, а најголемиот $8+9=17$, т.е. можни збирови се

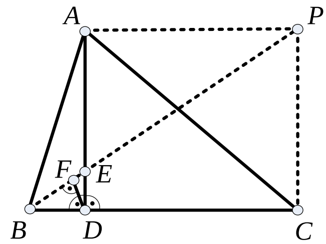
$$3,4,5,...,17 \qquad (*)$$

   и нив ги има 15. Од друга страна имаме најмалку $5+4+3+2+1=15$

различни парови. Односно, точно сите збирови од (*) се јавуваат по еднаш. Последното значи дека мора 1,2 и 8,9 да се во S. Но тогаш $1+9=2+8$. што противречи на условот.
Значи максималниот број елементи што може да ги содржи S е 5.

3. Даден е остроаголен триаголник ABC. Точката D е подножје на висината спуштена од A кон страната BC. Точката E лежи на отсечката AD и при тоа важи $\frac{\overline{AE}}{\overline{ED}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{DB}}$. Точката F е подножје на нормалата повлечена од точката D кон правата BE. Докажи дека $\measuredangle AFC=90^\circ$.

Решение. Нека P е точка таква што четириаголникот $ADCP$ е правоаголник.



Тогаш $\frac{\overline{AE}}{\overline{ED}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{DB}}$. Според тоа, точките B, E и P се колинеарни.(Зошто?). Затоа $\measuredangle DFP=90^\circ$ и бидејќи $\measuredangle DCP=90^\circ$, добиваме дека F, D, C, P лежат на иста кружница, т.е кружницата опишана околу правоаголникот $ADCP$. Конечно $\measuredangle AFC=90^\circ$, како агол над дијаметар.

4. Нека a и b се природни броеви поголеми од 2. Докажи дека постои природен број k и конечна низа $n_1,n_2,...,n_k$ од природни броеви, такви што $n_1=a,\ n_k=b$, и $(n_i+n_{i+1})\,|\,n_in_{i+1}$, $\forall i=1,...,k$.

Решение. Пишуваме $a\leftrightarrow b$, ако постои бараната низа. Лесно се гледа дека "$\leftrightarrow$" е релација за еквиваленција.
Да забележиме дека за секој $n,\ n\geq 3$, важи $n\leftrightarrow 2n$, и бараната низа е

$$n_1=n,\ n_2=n(n-1),\ n_3=n(n-1)(n-2),\ n_4=n(n-2),\ n_5=2n$$

За природен број $n,\ n\geq 4$, $n'=(n-1)(n-2)\geq 3$, па следува

$$n'\leftrightarrow 2n'. \tag{1}$$

За $n\geq 4$, имаме:

$$n_1=n,\ n_2=n(n-1),\ n_3=n(n-1)(n-2),\ n_4=n(n-1)(n-2)(n-3),$$
$$n_5=2(n-1)(n-2)=2n'$$

т.е.

$$n\leftrightarrow 2n' \tag{2}$$

и:

$$n_1'=n'=(n-1)(n-2),\ n_2'=n-1$$

т.е.

$$n' \leftrightarrow n-1 \tag{3}$$

Сега, од (1), (2), (3) добиваме:

$$n \leftrightarrow 2n',\quad 2n' \leftrightarrow n',\quad n' \leftrightarrow n-1,$$

па од транзитивност, добиваме

$n \leftrightarrow n-1$, за секој природен број n, $n \geq 4$,

односно, заради симетричност

$n \leftrightarrow n+1$, за секој природен број n, $n \geq 3$.

Одовде, лесно може секои два природни a и b, да се поврзат со оваа релација, од каде добиваме дека бараното тврдење важи.