ММО 2004

1. Дали постои природен број за кој збирот на цифрите на неговиот квадрат е:

а) 80; **б)** 81 ?

Решение. а) Лесно се докажува дека $a \equiv S(a)(\bmod 3)$ за секој природен број a (каде со $S(a)$ е означена сумата на цифрите на бројот a). Бидејќи квадрат на природен број може да дава само остаток 0 или 1 по модул 3, добиваме дека не постои полн квадрат со збир на цифри 80.

б) Постои. Таков е на пример 111111111. ■

2. Најди ги сите пресликувања $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ за кои $f(x+yf(x))=f(xy)+f(x)$.

Решение. За $x=y=0$ се добива $f(0)=2f(0)\Rightarrow f(0)=0$. Нека $f(a)=m$. Тогаш за $x=a$, $y=1$ се добива $f(a+m)=2m$. За $x=a+m$, $y=1$ се добива $f(a+3m)=4m$. За $x=a$, $y=3$ се добива $f(a+3m)=f(3a)+m$. Од последните две равенства се добива: $f(3a)+m=f(a+3m)=4m \Rightarrow f(3a)=3m$. Од произволноста на a следува дека $f(3x)=3f(x)$, за секој реален број x.

Ако $f(x)=0$ за некој $x\neq 0$, тогаш за $y=\frac{a}{x}$ се добива

$$0=f(x)=f(x+yf(x))=f(xy)+f(x)=f(a).$$

Од ова следува дека $f(x)=0$ за секој реален број.

Функцијата $f(x)=0$ го задоволува равенството од задачата.

Сега, нека $f(x)\neq 0$, за секој $x\neq 0$ и нека $y=-\frac{x}{3f(x)}$. Тогаш добиваме

$$\begin{aligned}2f(x)&=2f(x)+f(0)=2f(x)+f(x+3yf(x))=2f(x)+3f(xy)+f(x)=\\&=3(f(xy)+f(x))=3f(x+yf(x))=f(3x+3yf(x))=f(2x).\end{aligned}$$

За $y=-\frac{2x}{f(x)}$ добиваме

$$\begin{aligned}f(-x)&=f(-x+2x+yf(x))=f(xy)+f(x)=2\left(\frac{f(xy)}{2}+f(x)\right)-f(x)=\\&=2f\left(x+\frac{y}{2f(x)}\right)-f(x)=2f(0)-f(x)=-f(x).\end{aligned}$$

За $y=-1$ се добива $f(x-f(x))=f(-x)+f(x)=0$, од што следува дека $x-f(x)=0 \Rightarrow f(x)=x$.

Значи функциите $f(x)=0$ и $f(x)=x$ се единствените кои го задоволуваат равенството од задачата. ■

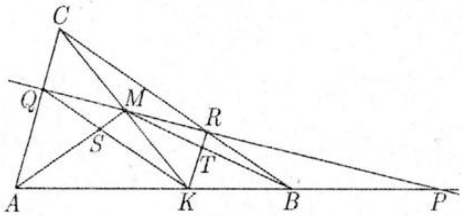
3. Нека $a_1,a_2,\dots,a_n,b_1,b_2,\dots,b_n$ се позитивни реални броеви за кои важи $\sum_{i=1}^{n} a_i=\sum_{i=1}^{n} b_i$. Докажи дека $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{a_i+b_i}\geq\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{2}$.

Решение I. Нека $S_1=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{a_i+b_i}$ и $S_2=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^2}{a_i+b_i}$. Од условот е јасно дека $S_1=S_2$. Тогаш имаме $4S_1=\sum_{i=1}^{n}\frac{2(a_i^2+b_i^2)}{a_i+b_i}\geq\sum_{i=1}^{n}\frac{(a_i+b_i)^2}{a_i+b_i}=\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=2\sum_{i=1}^{n}a_i$, од каде што следува бараното неравенство. ■

Решение II. Од очигледното неравенство $\left(a_i-\frac{a_i+b_i}{2}\right)^2\geq 0$ се добива дека $a_i^2\geq a_i(a_i+b_i)-\frac{(a_i+b_i)^2}{4}$ што е еквивалентно со $\frac{a_i^2}{a_i+b_i}\geq a_i-\frac{a_i+b_i}{4}$. Со сумирање на сите вакви неравенства и користејќи го условот за еднаквост на сумите го добиваме бараното неравенство. ■

Решение III. Функцијата $f(x,y)=\frac{x^2}{y}$ е конвексна. Од неравенството на Јенсен добиваме $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i,\frac{a_i+b_i}{2}) \ge f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n},\frac{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)}{2n}\right)$, т.е $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{2a_i{}^2}{a_i+b_i} \ge \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}a_i\right)^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(a_i+b_i)}{2}}$ што е еквивалелнтно со бараното неравенство (се користи условот за еднаквост на сумите). ■

4. Права p ги сече страните AC и BC и продолженото на страната AB од триаголник ABC соодветно во точките Q, R и P. Нека K и H се произволни точки од внатрешноста на страната AB, M и N се пресечните точки на правата p со KC и HC соодветно, а S и T се пресечните точки на отсечките AM и BN со отсечките QK и RH соодветно. Докажи дека точките S, T и P се колинеарни.

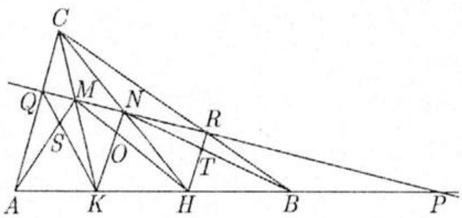


Решение. Прво ќе го докажеме случајот кога K и H се совпаѓаат. Во тој случај и M и N се совпаѓаат. Нека S' и T' се пресечните точки на CK соодветно со PS и PT. Од теоремата на Менелај за триаголникот PKM и правата AC се добива:

$\frac{\overline{KC}}{\overline{CM}}\cdot\frac{\overline{MQ}}{\overline{QP}}\cdot\frac{\overline{PA}}{\overline{AK}}=-1$. Од теоремата на Чева за триаголникот PKM и точката S се добива: $\frac{\overline{KS'}}{\overline{MS'}}\cdot\frac{\overline{MQ}}{\overline{PQ}}\cdot\frac{\overline{PA}}{\overline{KA}}=-1$. Од овие две равенства се добива: $\frac{\overline{KC}}{\overline{CM}}=\frac{\overline{KT'}}{\overline{MT'}}$. Аналогно и $\frac{\overline{KC}}{\overline{CM}}=\frac{\overline{KS'}}{\overline{MS'}}$. Од последните равенства се добива

$$\frac{\overline{KS'}}{\overline{MS'}}=\frac{\overline{KT'}}{\overline{MT'}}\Rightarrow\frac{\overline{KS'}}{\overline{MS'}}-1=\frac{\overline{KT'}}{\overline{MT'}}-1\Rightarrow\frac{\overline{KS'}-\overline{MS'}}{\overline{MS'}}=\frac{\overline{KT'}-\overline{MT'}}{\overline{MT'}}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{\overline{KM}}{\overline{MS'}}=\frac{\overline{KM}}{\overline{MT'}}\Rightarrow\overline{MS'}=\overline{MT'}\Rightarrow S'\equiv T'$$

Значи, точките S, T и P се колинеарни.



Нека, сега, точките K и H не се совпаѓаат, и нека O е пресечна точка на отсечките KN и HM. Претходно докажаното го применуваме на триаголниците KCB и ACH и добиваме дека точките S и T лежат на правата PO, па точките S, T и P се колинеарни. ■

5. Даден е квадрат поделен на 100×100 еднакви квадратчиња. На квадратот се нацртани искршени линии такви што:

а) Секоја од нив е составена од отсечки кои се страни на квадратчињата и се наоѓаат во внатрешноста на големиот квадрат;

б) Секоја од нив нема самопресечни точки;

в) Кои било две од нив немаат заеднички точки;

г) Секоја од нив има краеви на страните на големиот квадрат.

Докажи дека освен темињата на големиот квадрат постои барем уште една точка (на страните на големиот квадрат или во неговата внатрешност) низ која не минува ниту една искршена линија.

Решение. Да ги обоиме темињата на квадратчињата (јазлите) црно-бело како во шах. Секоја искршена линија со истобојни краеви има непарен број јазли, а со разнобојни краеви има парен број јазли. Да претпоставиме дека од сите јазли на границата на квадратот, освен темињата на квадратот, повлечени се сите искршени линии. Ќе докажеме дека сите линии заедно содржат парен број јазли. Доволно е да докажеме дека бројот на линии со истобојни краеви е парен (во спротивно, би добиле непарен број линии со истобојни краеви и на секоја од нив по непарен број јазли што значи дека на сите линии со истобојни краеви се наоѓаат непарен број јазли а на линиите со разнобојни краеви се наоѓаат парен број јазли, па бројот на сите јазли би испаднал непарен). На секоја страна од квадратот има по еднаков број бели и црни јазли (исклучени се темињата на квадратот). Значи бројот на бели и бројот на црни јазли се деливи со 4 . Нека има $4m$ бели и $4n$ црни јазли. Бројот на сите линии со бели краеви нека е k . Во тие k линии се искористени $2k$ бели јазли (на краевите), па остануваат $4m-2k$ - бели јазли. Секоја од линиите повлечени од тие јазли има црн крај. Значи има $4m-2k$ - линии со разнобојни краеви. Остануваат $4n-(4m-2k)$ - црни јазли и линиите повлечени од нив имаат црн крај т.е. има $\frac{4n-(4m-2k)}{2}=2(n-m)+k$ линии со црни краеви. Значи линии со истобојни краеви има $k+2(n-m)+k=2(n-m+k)$. Но во квадрат 100×100 има непарен број јазли затоа не може да минуваат низ сите јазли во квадратот. ■