

ММО 2018

1. Определи ги сите природни броеви n такви што $9^n - 7$ може да се претстави како производ од најмалку два последователни природни броеви.

Решение. Производ на три последователни природни броеви е делив со 3, а $9^n - 7 \equiv 2 \pmod{3}$, заклучуваме дека $9^n - 7$ не може да се запише како производ на три последователни броја.

Нека $9^n - 7 = m(m+1)$ за некој природен број m . Последната равенка е еквивалентна со равенката

$$4 \cdot 9^n - 27 = (2m+1)^2,$$

т.е. со равенката

$$4 \cdot 9^n - (2m+1)^2 = 27.$$

Бидејќи $\{1, 3, 9, 27\}$ се сите делители на 27 и

$$2 \cdot 3^n + 2m+1 > 2 \cdot 3^n - 2m-1$$

можни се два случаја:

$$1) \quad \begin{cases} 2 \cdot 3^n + 2m+1 = 27 \\ 2 \cdot 3^n - 2m-1 = 1 \end{cases}$$

$$2) \quad \begin{cases} 2 \cdot 3^n + 2m+1 = 9 \\ 2 \cdot 3^n - 2m-1 = 3 \end{cases}.$$

Во случајот 1) ако ги собереме равенките добиваме $3^n = 7$, што не е можно.

Во случајот 2) ако ги собереме равенките добиваме $3^n = 3$, од каде наоѓаме $n=1$. Со замена во првата равенка добиваме

$$2 \cdot 3 + 2m+1 = 9, \text{ т.е. } m=1.$$

Притоа, $9^1 - 7 = 1 \cdot (1+1)$.

2. Нека n е природен број и C е ненегативен реален број. Определи го бројот на низите реални броеви $1, x_2, \dots, x_n, 1$ такви што апсолутната вредност на разликата на секои два соседни члена на низата е еднаква на C .

Решение. Нека претпоставиме дека низата $1, x_2, \dots, x_n, 1$ го задоволува условот на задачата. Тогаш

$$|1 - x_2| = |x_2 - x_3| = \dots = |x_n - 1| = C. \quad (1)$$

Исто така

$$x_n - 1 = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_2 - 1) \quad (2)$$

каде бројот на парови загради од десната страна е $n-1$. Разгледуваме два случаи и тоа: n е непарен и n е парен број.

Случај 1. n е непарен, т.е. $n-1$ е парен број.

Тогаш равенството (2) е од облик

$$A_1 C = \underbrace{A_2 C A_3 C \dots A_n C}_{n-1}$$

каде $A_i \in \{-, +\}$, $1 \leq i \leq n$. Изборот на $A_i \in \{-, +\}$, $2 \leq i \leq n$ определува низа $1, x_2, \dots, x_n, 1$ која го задоволува условот (1). Да забележиме дека сумата на десната страна на равенството

$$A_1 C = \underbrace{A_2 C A_3 C \dots A_n C}_{n-1}$$

(за еден избор на $A_i \in \{-, +\}$, $2 \leq i \leq n$) е парен број пати C , а левата страна е $\pm C$, односно непарен број пати C . Според тоа, десната страна е еднаква на $\pm 2kC$, за некој $k \in \mathbb{N}$, а левата е еднаква $\pm C$. Последното е можно само ако $C=0$ и тогаш ја добиваме низата $1 = x_2 = \dots = x_n$, т.е. постои само една низа со саканото својство.

Случај 2. n е парен, т.е. $n-1$ е непарен број.

Ако $C=0$, тогаш $1 = x_2 = \dots = x_n$. Нека $C > 0$. Тогаш повторно од равенството (2) добиваме

$$A_1 C = \underbrace{A_2 C A_3 C \dots A_n C}_{n-1}.$$

Значи, задачата се сведува на бројот на избори на $A_i \in \{-, +\}$, $2 \leq i \leq n$ така што важи

$$A_1 C = \underbrace{A_2 C A_3 C \dots A_n C}_{n-1}.$$

Ако на левата страна на равенството имаме $+C$, тогаш од десната страна на равенството мора разликата меѓу бројот на позитивните и бројот на негативните константи да е точно 1, односно $+C$ треба да се јавува $\frac{n-2}{2} + 1 = \frac{n}{2}$ пати, а $-C$ точно $\frac{n-2}{2}$ пати. Ваквиот избор може да се направи на $\binom{n-1}{(n-2)/2} = \binom{n-1}{(n-2)/2}$ начини (од низа со должина $n-1$ избираме $n/2$ позиции на кои ќе стојат $+C$, а на останатите позиции ќе се јавува $-C$). На исто толку начини може да се запише и сумата од десната страна ако од лево е $-C$. Значи вкупниот број на вакви записи е $2\binom{n-1}{n/2}$.

Конечно, ако со $r = r(n, C)$ го означиме бројот на низите кои го задоволуваат условот на задачата тогаш

$$r = \begin{cases} 1, & C = 0 \\ 0, & n \text{ е непарен и } C > 0. \\ 2\binom{n-1}{n/2}, & n \text{ е парен и } C > 0. \end{cases}$$

3. Определи ги сите функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такви што

$$f(\max\{x, y\} + \min\{f(x), f(y)\}) = x + y \quad (1)$$

за секои $x, y \in \mathbb{R}$.

Решение. Нека функцијата f е таква што за секои $x, y \in \mathbb{R}$ е исполнето равенството (1).

Ако во (1) ставиме $y = x$ добиваме

$$f(x + f(x)) = 2x, \text{ за секој } x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Понатаму, за $x = 0$ од (2) следува $f(f(0)) = 0$, а за $x = y = \frac{f(0)}{2}$ од (1) добиваме $f(f(0)) = f(0)$. Сега, од последните две равенства следува $f(0) = 0$.

Сега, ако во (1) ставиме $y = 0$ и искористиме дека $f(0) = 0$, добиваме

$$f(\max\{x, 0\} + \min\{f(x), 0\}) = x, \text{ за секој } x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Ќе разликуваме два случаи, и тоа:

Случај 1°. $x > 0$. Тогаш од (3) следува

$$f(x + \min\{f(x), 0\}) = x.$$

Сега од последното равенство следува дека или $f(x + f(x)) = x$ или $f(x) = x$. Ако $f(x + f(x)) = x$, тогаш од (2) следува $2x = x$, што не е можно кога $x > 0$. Значи, $f(x) = x$.

Случај 2° $x < 0$. Тогаш од (3) следува

$$f(\min\{f(x), 0\}) = x.$$

Сега, од последното равенство добиваме или $f(0) = x$ или $f(f(x)) = x$. Ако $f(0) = x$, тогаш $0 > x = f(0) = 0$, што е противречност. Значи, $f(f(x)) = x$. Сега, ако во (2) наместо x ставиме $f(x)$ и ако прво искористиме дека $f(f(x)) = x$, а потоа го земеме предвид равенството (2) добиваме

$$2f(x) = f(f(x) + f(f(x))) = f(f(x) + x) = 2x,$$

од каде следува дека $f(x) = x$, за $x < 0$.

Конечно, од 1° и 2° следува дека $f(x) = x$ за секој $x \in \mathbb{R}$. Не е тешко да се провери дека оваа функција е решение на задачата.

4. Нека $t_k = a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k$, каде $a_1, a_2, \dots, a_n$ се позитивни реални броеви и $k \in \mathbb{N}$. Докажи дека

$$\frac{t_5^2 t_1^6}{15} - \frac{t_4^4 t_2^2 t_1^2}{6} + \frac{t_2^3 t_4^5}{10} \geq 0.$$

Решение. Неравенството кое треба да се докаже е еквивалентно со неравенството

$$2t_5^2 t_1^6 - 5t_4^4 t_2^2 t_1^2 + 3t_2^3 t_4^5 \geq 0,$$

односно со неравенството

$$2t_5^2 t_1^6 + 3t_2^3 t_4^5 \geq 5t_4^4 t_2^2 t_1^2.$$

Користејќи го неравенството помеѓу аритметичка и геометричка средина имаме

$$2t_5^2 t_1^6 + 3t_2^3 t_4^5 \geq 5(t_5^4 t_1^{12} t_2^9 t_4^{15})^{\frac{1}{5}}.$$

Според тоа, доволно е да докажеме дека

$$t_5^4 t_1^{12} t_2^9 t_4^{15} \geq t_4^{20} t_2^{10} t_1^{10},$$

т.е. дека $t_5^4 t_1^2 \geq t_4^5 t_2$.

Да забележиме дека $t_5 t_3 \geq t_4^2$, бидејќи $\sum_{i=1}^n a_i^8$ се појавува на двете

страни од неравенството и уште важи

$$a_i^5 a_j^3 + a_i^3 a_j^5 = a_i^3 a_j^3 (a_i^2 + a_j^2) \geq a_i^3 a_j^3 (2a_i a_j) = 2a_i^4 a_j^4,$$

за сите $i < j$. Важи и неравенството $t_5 t_1 \geq t_3^2$. Навистина, $\sum_{i=1}^n a_i^6$ се

појавува на двете страни од неравенството и уште

$$a_i^5 a_j + a_i a_j^5 = a_i a_j (a_i^4 + a_j^4) \geq 2a_i a_j (a_i^2 a_j^2) = 2a_i^3 a_j^3,$$

за сите $i < j$. Точно е неравенството $t_5 t_1 \geq t_4 t_2$, бидејќи

$$(a_i^5 a_j + a_i a_j^5) - (a_i^4 a_j^2 + a_i^2 a_j^4) = a_i a_j (a_i - a_j)^2 (a_i^2 + a_i a_j + a_j^2) \geq 0.$$

Конечно,

$$t_5^4 t_3^2 t_1^2 \geq t_5^2 t_4^4 t_1^2 \geq t_5 t_4^4 t_3^2 t_1 \geq t_4^5 t_3^2 t_2,$$

од каде следува дека $t_5^4 t_1^2 \geq t_4^5 t_2$.

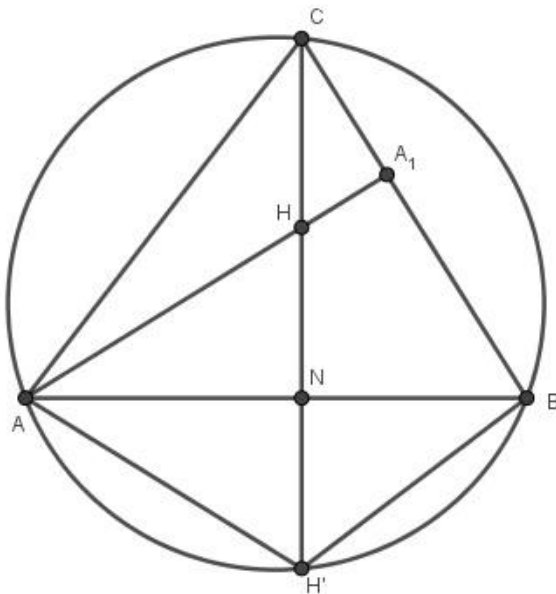
5. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со ортоцентар H . Точката H' е симетрична на H во однос на страната AB . Нека N е пресечната точка на HH' со AB . Кругницата низ точките A , N и H' по втор пат ја сече правата AC во точка M , а кругницата низ точките B , N и H' по втор пат ја сече правата BC во точка P . Докажи дека точките M , N и P се колинеарни.

Решение. Прво ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. Нека H е ортоцентар во $\triangle ABC$, а H' е симетрична точка на H во однос на страната AB . Тогаш H' припаѓа на опишаната кругница околу $\triangle ABC$.

Доказ. I начин. Нека N е пресечната точка на HH' со AB , а A_1 е подножјето на висината спуштена од A кон BC . Тогаш $\triangle ANH \cong \triangle ANH'$, бидејќи AN е заедничка страна, $\overline{HN} = \overline{NH'}$ и $\angle ANH = \angle ANH' = 90^\circ$. Од

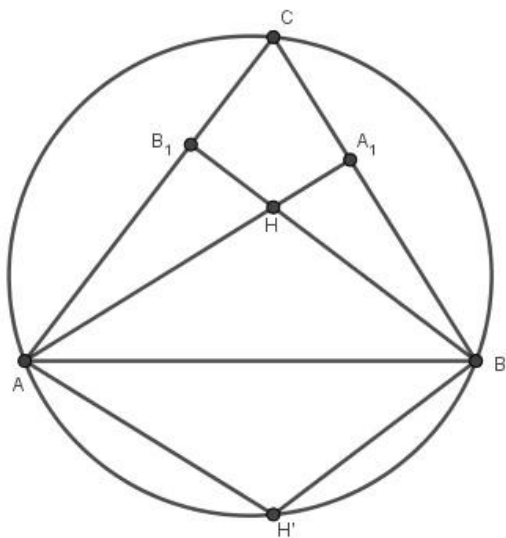
$$\begin{aligned}\angle H'AB &= \angle H'AN = \angle NAH = \angle BAA_1 \\ &= 90^\circ - \angle ABC = \angle NCB = \angle H'CB\end{aligned}$$



следува дека четириаголникот $AH'BC$ е тетивен, т.е. H' лежи на опишаната кружница околу $\triangle ABC$.

II начин. Нека A_1 е подножјето на висината спуштена од A кон BC , а B_1 е подножјето на висината спуштена од B кон AC . Од $\angle HB_1C = \angle HA_1C = 90^\circ$ следува дека четириаголникот B_1HA_1C е тетивен. Тогаш $\angle A_1HB_1 = 180^\circ - \gamma = \alpha + \beta$ т.е. $\angle AHB = \angle A_1HB_1 = \alpha + \beta$ (накрсни агли). Од $\triangle ANH \cong \triangle ANH'$ и $\triangle BNH \cong \triangle BNH'$ следува дека $\angle AH'B = \angle AHB = \alpha + \beta$. Тогаш од

$$\angle AH'B + \angle ACB = \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$



следува дека четириаголникот $AH'BC$ е тетивен, т.е. H' лежи на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. ■

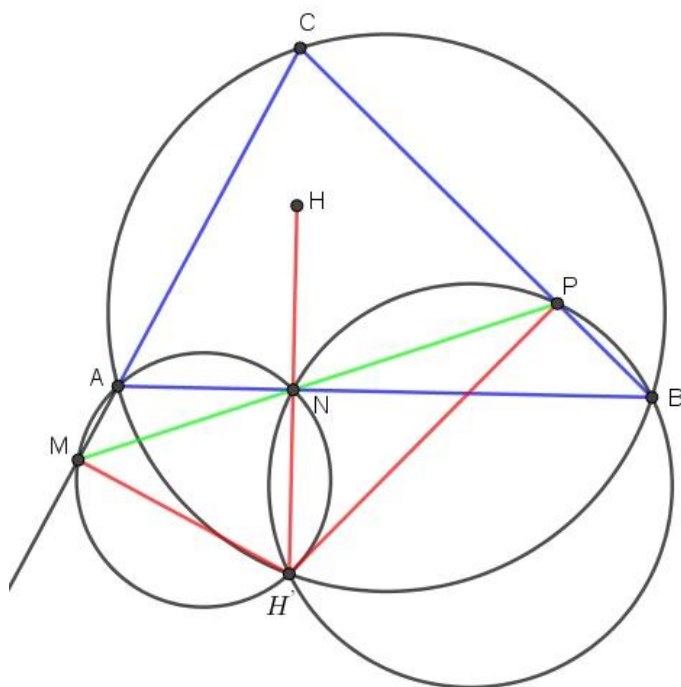
Од $\angle ANH' = 90^\circ$ следува дека AH' е дијаметар на опишаната кружница околу $\triangle ANH'$. Тогаш $\angle H'MA = 90^\circ$ т.е.

$$H'M \perp AC \quad (1)$$

Аналогно се покажува дека

$$H'P \perp BC \quad (2)$$

Од условот на задачата имаме



$$H'N \perp AB \quad (3)$$

Од лемата следува дека четириаголникот $AH'BC$ е тетивен. Од (1), (2) и (3) и теорема на Симсон за $\triangle ABC$ и точка H' која лежи на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ следува тврдењето на задачата.