## БМО 2006

1. Нека $a,b$ и $c$ се позитивни реални броеви. Докажи, дека

$$\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}\geq\frac{3}{1+abc}.$$

**Решение.** *Прв начин*. Со смените $abc=k^3,\ a=\frac{ky}{x},\ b=\frac{kz}{y},\ c=\frac{kx}{z}$, за $k,x,y,z>0$ неравенството го добива видот

$$\frac{x}{ky+k^2z}+\frac{y}{kz+k^2x}+\frac{z}{kx+k^2y}\geq\frac{3}{k^3+1}.$$

Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\frac{x}{ky+k^2z}+\frac{y}{kz+k^2x}+\frac{z}{kx+k^2y}\geq\frac{(x+y+z)^2}{x(ky+k^2z)+y(kz+k^2x)+z(kx+k^2y)}$$
$$=\frac{(x+y+z)^2}{(k^2+k)(xy+yz+zx)}\geq\frac{3}{k^2+k}\geq\frac{3}{k^3+1},$$

бидејќи

$$(x+y+z)^3\geq3(xy+yz+zx)\ \text{ и }\ k^2+k\leq k^3+1.$$

Знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z$ и $k=1$, т.е. $a=b=c=1$.

*Втор начин*. Ако помножиме со $1+abc$ иземеме предвид дека

$$1+\frac{1+abc}{a(1+b)}=\frac{1+a}{a(1+b)}+\frac{b(1+c)}{1+b},$$

како и аналогните равенства даденото неравенство го добива видот

$$\frac{1+a}{a(1+b)}+\frac{b(1+c)}{1+b}+\frac{1+b}{b(1+c)}+\frac{c(1+a)}{1+c}+\frac{1+c}{c(1+a)}+\frac{a(1+b)}{1+a}\geq6. \qquad (1)$$

Сега неравенството (1) следува од неравеството меѓу аритметичката и геометриската средина, т.е. од неравенството

$$\frac{1+a}{a(1+b)}+\frac{a(1+b)}{1+a}\geq2$$

и аналогните неравенства. Лесно се добива дека знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$.

*Трет начин*. Ако даденото неравенство го сведеме под заеднички именител и се ослободиме од заградите го добиваме неравенството

$$a^3b^2c^2+a^2b^3c^2+a^2b^2c^3+a^2b^3c+ab^2c^3+a^3bc^2-2a^2bc^2-2ab^2c^2-2a^2b^2c$$
$$-2a^2bc-2ab^2c-2abc^2+ab^2+bc^2+a^2c+ab+ac+bc\geq0.$$

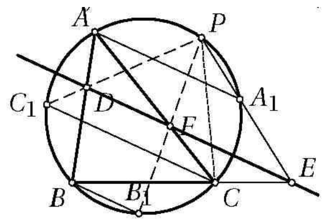
Забележуваме дека мономите кои на левата страна од неравенството се со коефициент $-2$ имаат степени 4 или 5, а останатите мономи имаат коефициенти 1. Последното укажува на можноста да се искористи неравенството $x^2-2x+1\geq0$. За таа цел степенот на секој собирок со коефициент $-2$ треба да е аритметичка средина на степените на другите два собироци со коефициент

1. Последноито значи дека треба да ги фрупираме собироците со степени 3, 5, 7 и собироците со степени 2, 4, 6,. Така го добиваме очигледното неравенство

$$bc^2(ab-1)^2+ca^2(bc-1)^2+ab^2(ca-1)^2+bc(ab-1)^2+ca(bc-1)^2+ab(ca-1)^2\geq 0.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $ab=bc=ca=1$, т.е. $a=b=c=1$.

2. Даден е триаголник $ABC$ и права $m$ која ги сече страните $AB$ и $AC$ соодветно во точките $D$ и $F$, и продолжението на страната $BC$ во точката $E$ така што $C$ е меѓу $B$ и $E$. Трите прави кои минуваат низ точките $A,B,C$ и се паралелни со $m$ по вторпат ја сечат кружницата опишана околу триаголникот $ABC$ соодветно во точките $A_1,B_1,C_1$. Докажи дека правите $A_1E,B_1F,C_1D$ се сечат во една точка.




**Решение.** Нека правата $A_1E$ по вторпат ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката $P$. Тогаш

$$\measuredangle EPC=\measuredangle A_1PC=\measuredangle A_1AC=\measuredangle EFC,$$

па затоа четириаголникот $EPFC$ е тетивен. Сега

$$\measuredangle FPC=\measuredangle FEC=\measuredangle B_1BC=\measuredangle B_1PC,$$

па затоа точката $P$ лежи на правата $B_1F$. Аналогно $P$ лежи на правата $C_1D$.

3. Определи ги сите подредени тројки $(m,n,p)$ позитивни рационални броеви такви што броевите $m+\frac{1}{np}$, $n+\frac{1}{pm}$, $p+\frac{1}{mn}$ се цели.

**Решение.** Да означиме $a=mnp$. Броевите $\frac{a+1}{mn},\frac{a+1}{np},\frac{a+1}{pm}$ се цели, па затоа и нивниот производ $\frac{(a+1)^3}{a^2}=k$ е цел број. Значи, $a$ е решение на равенката

$$x^3+(3-k)x^2+3x+1=0.$$

Оттука следува дека ако $a=\frac{q}{r}, (q,r\in\mathbb{N}, \mathrm{NZD}(q,r)=1)$, тогаш $q,r\,|\,1$, па затоа $a=1$. Според тоа, $a+1=2a=2mnp$, па затоа $2p=\frac{a+1}{mn}$ е цел број. Аналогно $2m$ и $2n$ се цели броеви, па бидејќи $2m\cdot 2n\cdot 2p=8$, единствени решенија $(m,n,p)$ се тројките $(1,1,1), (1,2,\frac{1}{2})$ и $(4,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ со нивните пермутации.

4. Нека $m$ е природен број. Определи ги сите природни броеви $a$ за кои низата дефинирана со $a_0=a$ и

$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{a_n}{2}, & \text{ако } a_n \text{ е парен,}\\ a_n+m, & \text{ако } a_n \text{ е непарен,}\end{cases}$$

за $n=1,2,3,..$ е периодична, со период (сегмент кој периодично се повторува) од видот $a_0, a_1, ..., a_k$, за некој $k$.

**Решение.** Ако $m$ е парен број, тогаш низата не е периодична. Навистина, за $a=2^r k, 2 \nmid k$ имаме $a_r=k$ и $a_{r+i}=k+im,$ за $i>0$.

Нека $m$ е непарен и нека $a_k$ е најмалиот член на низата. Јасно, $2 \nmid a_k$, па затоа $a_{k+1}=a_k+m$ и $a_{k+2}=\frac{a_k+m}{2}\geq a_k$, што значи $a_k \leq m$. Со едноставна индукција се покажува дека по $a_k$ нема непарни членови на низата поголеми од $m$ и парни членови на низата поголеми од $2m$. Според тоа, ако низата $\{a_n\}$ е чисто периодична, тогаш $a \in S=\{1,2,...,m,m+1,m+3,...,2m\}$.

Од друга страна, за $a \in S$ сите членови на низата припаѓаат на множеството $S$, па затоа низата е периодична почнувајќи од некоја точка. Уште повеќе, ако $a_k=a_l$ за $l<k$, тогаш лесно се докажува дека мора да важи $a_{k-1}=a_{l-1}$ итн., па затоа низата е периодична почнувајќи од $a_0$.