Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус

Вангел Каруловски
Душко Ковачев
Скопје

БИНАРНИ ОПЕРАЦИИ ВО ДАДЕНО МНОЖЕСТВО

Група еминентни француски математичари што ги публикуваат своите дела под заеднички псевдоним (Nikolas Burbaki), своето дело **Алгебра** го почнуваат со зборовите: „Занимавањето со алгебра всушност значи да се пресметува, т.е. да се извршуваат со елементите на дадено множество алгебарски дејства – алгебарски операции, од кои најпознати примери се четирите операции во елементарната аритметика“.

А што значи всушност „да се извршуваат со елементите на дадено множество алгебарски дејства – алгебарски операции“? Со други зборови, што ќе подразбираме под барањето: во дадено множество да се изврши дадена операција?

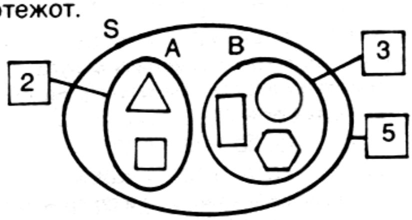
Што им е заедничко и карактеристично на операциите што досега ги имаме изучено во нашето школување?

На пример, зборуваме за операции со: броеви, отсечки, агли, полиноми итн. Знаеме дека **збир** на два броја е број, **збир** на две отсечки – отсечка; **збир** на два агли – агол.

Карактеритично за сите нив (а исто и за другите операции) е тоа што на секоја подредена двојка елементи (објекти) од некое множество му е придружен само еден елемент (објект) од истото тоа множество. Со други зборови, ако зборуваме за операција во множеството X, треба да обезбедиме пресликување на $X \times X$ во X.

На пример: Нека е дадено множеството на природните броеви (N) и едно пресликување $(m, n) \xrightarrow{f} s$ со следново правило:

f: Дадено е конечното множество A, така што бA = m и конечното множество B, така што бB = n, и притоа $A \cap B = \varnothing$; тогаш б$(A \cup B) = s$. Во посебен случај ако $m = 2$, а $n = 3$, графички множествата A, B и $A \cup B$ може да се претстават како на цртежот.



Очигледно дека правилото f ни обезбедува пресликување од $N \times N$ во N. Вие сигурно го препознавте тоа правило што го викаме „собирање во множеството на природните броеви“ и за него имаме резервиран знак „+“.

Така, наместо $(m, n) \xrightarrow{f} s$, каде што $m, n, s \in N$ и f опишаното правило, пишуваме: $m + n = s$, но и за бројот s (исто така и за изразот n) $m + n$) велиме дека е збир на броевите m и n.

Според тоа, собирањето е операција во множеството природни броеви.

$$(m, n) \xrightarrow{f} s, \text{ односно } m + n = s,$$
$$(1,1) \xrightarrow{f} 2, \text{ односно } 1+1 = 2,$$
$$(1,2) \xrightarrow{f} 3, \text{ односно } 1+2 = 3.$$

Сега, да ја дадеме дефиницијата за алгебарска операција во дадено множество.

Дефиниција 1. Нека е X дадено непразно множество и f правило што секоја подредена двојка $(x,y) \in X \times X$ ја пресликува во елементот $z \in X$. f се вика алгебарска операција или кратко операција во тоа множество.

За означување на пресликувањето f,или што е исто за означување на операцијата, можеме да употребуваме разни ознаки (симболи) како на пример: $*$, $\triangle$, o, $\square$, $\square$ итн. како и познатите ознаки „+“, „−“, „·“, „:“, итн.

Зададеното множество X и операцијата „o“ во тоа множество образуваат групоид X(o).

Да разгледаме едно друго познато правило „−“ во множеството N. За $a, b, d \in N$, $a-b = d$ само тогаш ако $a = b+d$.

Тоа е, како што гледате, одземање во множеството N. Да го примениме тоа правило на некои подредени парови за да утврдиме дали и тоа дефинира пресликување.

$$8-5 = 3, \text{ затоа што } 8 = 5+3,$$
$$5-3 = 2, \text{ затоа што } 5 = 3+2,$$

меѓутоа, 3−5 не постои во множеството природни броеви, зашто не постои природен број собран со 5, па збирот да дава 3.

Значи парот (3,5) нема своја слика во N. Според тоа, правилото „−“ не дефинира пресликување од $N \times N$ во N, односно одземањето не е операција во множеството N.

Множеството N и собирањето „+“ образуваат групоид.

Множеството N и одземањето „−“ не образуваат групоид.

Множеството N и множењето „·“ образуваат групоид.

Множеството N и делењето „:“ не образуваат групоид.

Се поставува прашањето како може да се зададе операција во некое множество.

1^0. Возможно е на секој подреден пар од зададеното множество да му се определи слика.

На пример: Нека е зададено множеството $A = \{a,b,c\}$; тогаш $A \times A = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c)\}$, операцијата „o“ нека е зададена со:

$a \circ a = b$;	$a \circ b = c$;	$a \circ c = a$;
$b \circ a = c$;	$b \circ b = a$;	$b \circ c = b$;
$c \circ a = a$;	$c \circ b = b$;	$c \circ c = c$;

Ова пресликување (операција) може покусо да се зададе и со помош на шема.

o	a	b	c
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

Во таа шема, на пример, $b \circ c = b$ значи: Првиот член во парот се избира од првата колона (b), а во вториот член од првиот ред (c). Во квадратчето што се наоѓа во пресекот на соодветниот ред и колона се запишува сликата на тој пар (b).

Ваквата шема е позната како Келиева шема.

Користејќи се со ова може да се определат вредностите на изразите:

$$a \circ c \circ b; \qquad b \circ (a \circ b) \text{ и сл.}$$

Определувајќи ја вредноста според редоследот на запишувањето се добива $a \circ c \circ b = a \circ b = c$ (затоа што $a \circ c = a$). Определувајќи ја прво вредноста на парот во заграда се добива $b \circ (a \circ b) = b \circ c = b$ (затоа што $a \circ b = c$).

2^0. Операцијата може да биде зададена и со опишување на пресликувањето.

На пример: Нека е зададено множеството: $A = \{a, b, c\}$ и пресликувањето $A \times A \xrightarrow{*} A$ со: Секој подреден пар $(x, y) \in A \times A$ се пресликува во елемент од A еднаков на вториот член од подредениот пар.

На тој начин се добива $a * a = a$; $b * c = c$ итн. Изразите, како во првиот случај, и тука се решаваат аналогно:

$a * c * b = c * b = b$ (поради $a * c = c$).

$b * (a * b) = b * b = b$ (поради $a * b = b$).

Кој начин ќе се избере за претставување на операцијата во дадено множество ќе зависи од самото зададено множество и од тоа кој од начините е поедноставен.

Задачи:

1. Нека е Q множество на рационалните броеви и $a, b \in Q$. Во Q ја дефинираме операцијата $\square$ на следнист начин: $a \square b$ е полузбир на броевите a и b, односно $a \square b = \frac{a+b}{2}$.

1^0 $5 \square (-1)$; 2^0 $\frac{1}{2} \square \frac{1}{4}$; 3^0 $\square - 5\frac{3}{8} \square 4\frac{1}{2}$; 4^0 $2{,}34 \square 5{,}66$.

2. Дадени се множествата N (природни броеви), Z (цели броеви) и Q (рационални броеви) и познатите правила „+“ (за собирање), „−“ (за одземање), „·“ (за множење) и „:“ (за делење). Кое правило со кое множество е операција? (Потврдниот одговор означи го со „ДА“, а одречниот со „НЕ“).

	N	Z	Q
+			
−			
·			
:			

3. Операцијата □ е зададена со Келиева шема. Определи ги вредностите на изразите:

а) 2 □ 3;
б) 3 □ 2;
в) 4 □ 1;
г) 3 □ 4;
д) (4 □ 2) □ 3;
ѓ) 4 □ (2 □ 3);
е) 1 □ (3 □ 4);
ж) (2 □ 3) □ (1 □ 4).

□	1	2	3	4
1	1	3	2	4
2	4	1	3	2
3	2	4	1	3
4	3	2	4	1

4. Во множеството A = { 1,2,3 } зададена е операцијата „∗“ со $1 * 1 = 1$; $1 * 2 = 3$; $1 * 3 = 2$; $2 * 1 = 2$; $2 * 2 = 1$; $2 * 3 = 3$; $3 * 1 = 3$; $3 * 2 = 2$; $3 * 3 = 1$.

Определи ги вредностите на изразите.

а) (1 ∗ 2) ∗ (1 ∗ 3);
б) 1 ∗ (2 ∗ 1) ∗ 3;
в) ((1 ∗ 2) ∗ 1) ∗ 3;
г) 1 ∗ ((2 ∗ 1) ∗ 3);
д) (3 ∗ 2) ∗ 1;
ѓ) 3 ∗ (2 ∗ 1);
е) (3 ∗ 1) ∗ 2;
ж) 3 ∗ (1 ∗ 2).

5. Во множеството N е зададена операцијата „o“ $x \circ y = (x+y)\cdot 2$, т.е., двократен производ од збирот на броевите x и y. Определи ги вредностите на изразите:

а) 2 o 6;
б) 6 o 2;
в) 12 o 32;
г) 32 o 12;
д) (2 o 5) 4;
ѓ) 2 o (5 o 4);
е) (7 o 8) o 9;
ж) 7 o (8 o 9).