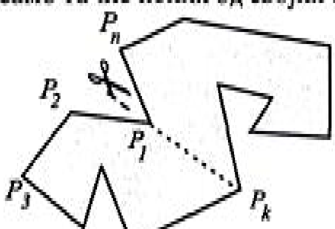
Разбијање полигона и равни

Олга Бодрожа-Пантић, Богданка Јаковљев, **Нови Сад**

Када кажемо да се неки полигон $\mathcal{P}$ **разлаже** или **разбија** на неке полигоне $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots,$ $\mathcal{P}_n$ $(n \in \mathbb{N})$, подразумевамо да је *полигон* $\mathcal{P}$ (*као скуп тачака*) *једнак унији полигона* $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_n$ при чему свака два полигона $\mathcal{P}_i$ и $\mathcal{P}_j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$ у пресеку могу имати само тачке неких од својих страница.



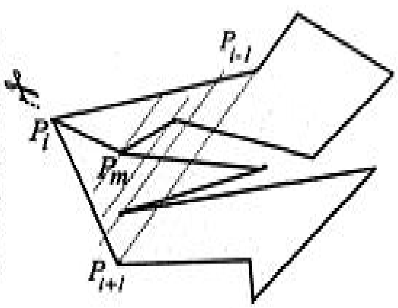
Слободније речено, полигони $\mathcal{P}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ се међусобно могу додиривати али не и преклапати. Из искуства знамо да увек можемо парче папира облика полигона, који не мора бити конвексан, разрезати на троуглове са теменима међу теменима полазног полигона. Приликом таквог резања ми налазимо тзв. *унутрашње дијагонале* полигона и по њима режемо.

Подсетимо се, дуж која спаја два несуседна темена полигона се назива његовом **дијагоналом**. Ако се та дуж, без својих крајњих тачака, налази цела у унутрашњости полигона, тада је називамо **унутрашња дијагонала**. Конвексни полигони имају особину да су им све дијагонале унутрашње. Међутим, код произвољног полигона не мора свака дијагонала бити унутрашња. Ипак, оно што нам омогућава „резање" је следеће тврђење.

Задатак 1. *Доказати да сваки n-тоугао $P_1P_2\dots P_n$, различит од троугла $(n > 3)$, има бар једну* **унутрашњу дијагоналу**.

Доказ. Изаберимо један од углова полигона који је конвексан. Нека је то угао код темена P_i. Ако је отворена дуж $]P_{i-1}P_{i+1}[$ цела у унутрашњости полигона, тада смо добили унутрашњу дијагоналу. Ако, пак, то није случај, тада дијагонала $P_{i-1}P_{i+1}$ пресеца руб полигона (полигоналну линију $P_1P_2\dots P_n$). То значи да мора постојати бар једно теме полигона у унутрашњости троугла $P_iP_{i-1}P_{i+1}$ или, ако то већ није случај, оно бар на отвореној дужи $]P_{i-1}P_{i+1}[$.

У првом случају, означимо оно међу теменима полигона из унутрашњости троугла $P_iP_{i-1}P_{i+1}$ које је најудаљеније од праве $P_{i-1}P_{i+1}$. Ако је то теме полигона P_m $(m \notin \{i-1, i, i+1\})$, тада је дијагонала P_iP_m унутрашња. Ако, пак, у унутрашњости троугла $P_iP_{i-1}P_{i+1}$ немамо темена полигона а на дијагонали $P_{i-1}P_{i+1}$ постоји неко теме P_k $(k \notin \{i-1, i+1\})$, тада је дијагонала P_iP_k унутрашња дијагонала полигона $P_1P_2\dots P_n$. □



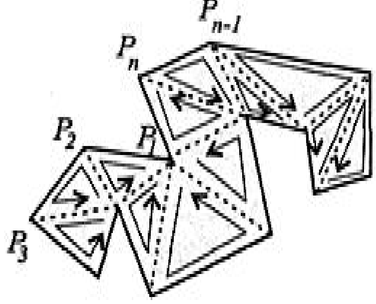
Задатак 2. *Доказати да се сваки полигон $P_1P_2\dots P_n$ који није троугао може разложити унутрашњим дијагоналама на троуглове.*

Доказ. У претходном задатку смо показали да полигон $P_1P_2\dots P_n$ има бар једну унутрашњу дијагоналу. Не умањујући општост, претпоставимо да је то дијагонала P_1P_k $(3 \leqslant k \leqslant n-1)$. Овом дијагоналом је полазни полигон $P_1P_2\dots P_n$ разбијен на два полигона $P_1P_2\dots P_k$ и $P_1P_kP_{k+1}\dots P_n$. Приметимо да оба ова полигона имају мањи број страница од полигона од којег су настали. За сваки од ова два нова полигона важи: ако уочени полигон није троугао, тада има бар једну унутрашњу дијагоналу, те се даље може разлагати. Наведени поступак настављамо разбијајући сваки добијени полигон различит од троугла на два са мањим бројем страница од полигона од којег је настао. На овај начин долазимо до троуглова у коначном броју корака. □

Разбијање полигона на троуглове називамо **триангулација**.

Задатак 3. *Доказати да је број троуглова насталих триангулацијом полигона* $P_1P_2\ldots P_n$ *једнак* $n-2$ *(без обзира како вршили разбијање полигона).*

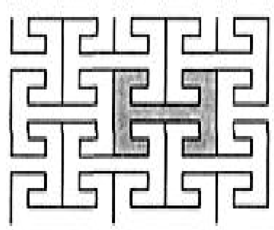
Доказ. Приметимо да смо у напред описаном поступку разбијања полигона у сваком кораку број полигона који разбијају полазни повећавали за један. Дакле, ако са t означимо број троуглова добијених у триангулацији, то значи да смо извршили $t-1$ корака, тј. да смо са $t-1$ унутрашњих дијагонала полазни полигон разложили на троуглове.

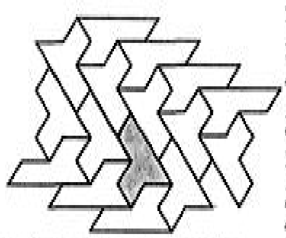


Хајде да „обиђемо" свих t троуглова по његовим страницама (као што је приказано на слици) и да успут пребројимо пређене странице. Добијени број страница који смо прешли износи $3t$. Приликом тог пребројавања сваку од унутрашњих дијагонала које су странице ових троуглова смо рачунали два пута а странице полазног полигона само по једанпут. Отуда имамо $3t = n + 2(t-1)$, тј. $t = n-2$. □

Сада појам разбијања преносимо и на целу раван.

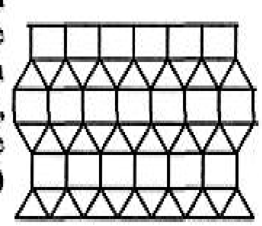
За неки скуп полигона $\{\mathcal{P}_i\}_{i\in\mathcal{I}}$, ($\mathcal{I}$ - скуп индекса) у равни Π кажемо да **разбија** (или **разлаже**) раван Π ако унија ових полигона покрива целу раван и ако свака два полигона имају дисјунктне унутрашњости (највише могу да се додирују). Ово разбијање равни се назива често и **тајлинг**. Полигоне који учествују у тајлингу називамо **плочице** или **ћелије** тајлинга.

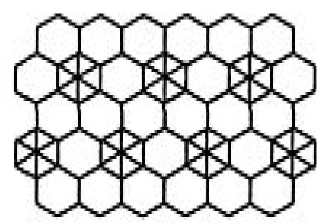




За два тајлинга кажемо да су подударна ако постоји трансформација подударности која пресликава један на други. Ако су све плочице тајлинга међусобно подударне, онда кажемо да је тај тајлинг **једнотипни**; ако се све плочице могу поделити у две класе међусобно подударних плочица, тада говоримо о **двотипном** тајлингу, и слично.

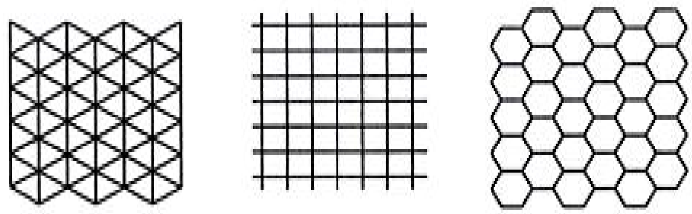
Посебно интересантни тајлинзи су они који се састоје од правилних полигона. Ако је свака страница плочице оваквог тајлинга уједно и страница још тачно једне плочице, тај тајлинг се назива **мозаик**. Дакле, све гране мозаика (ивице правилних полигона) су исте дужине.





Задатак 4. *Доказати да једнотипни мозаици, сачињени само од правилних n-тоуглова ($n \geqslant 3$), постоје само за $n \in \{3,4,6\}$.*

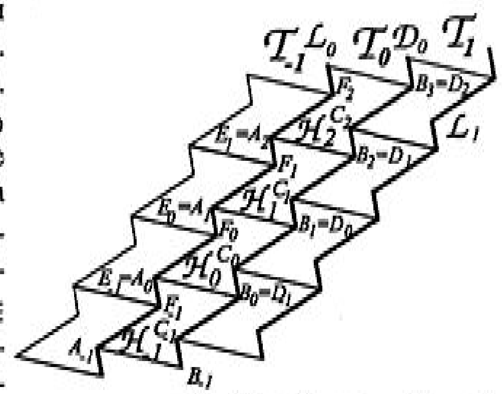
Доказ. Посматрајмо један једнотипни мозаик који се састоји од правилних n-тоуглова ($n \geqslant 3$). Ако са k означимо број n-тоуглова са заједничким теменом, тада, сумирајући вредности углова полигона код тог темена, добијамо да важи $\frac{(n-2)}{n}\pi k = 2\pi$, што је еквивалентно са $k = 2 + \frac{4}{n-2}$. Како су k и n природни бројеви већи од 2, то имамо да мора бити испуњено $(n-2) \mid 4$, што даље имплицира $n \in \{3,4,6\}$. □



Разбијања о којима говори претходни задатак, приказана на слици, називамо редом **троугаона**, **квадратна** и **хексагонална мрежа.**

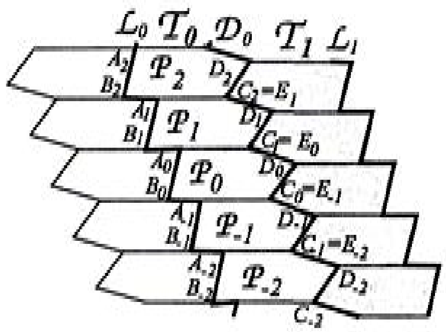
Задатак 5. *Доказати да за сваки шестоугао са 3 пара подударних паралелних страница (централно симетрични шестоугао) постоји једнотипни тајлинг чије су све плочице подударне овом шестоуглу.*

Доказ. Посматрајмо један такав шестоугао $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$. Означимо га са $\mathcal{H}_0$ а са $\mathcal{H}_i$ шестоугао $A_iB_iC_iD_iE_iF_i$ који се добија од $\mathcal{H}_0$ транслацијом за вектор $i \cdot \overrightarrow{A_0E_0}$, $i \in \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$. Приметимо да је $\overrightarrow{A_0E_0} = \overrightarrow{B_0D_0}$ и да $E_i \equiv A_{i+1}$ и $D_i \equiv B_{i+1}$, за све $i \in \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$. Шестоуглови $\ldots,\mathcal{H}_{-3},\mathcal{H}_{-2},\mathcal{H}_{-1},\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2,\mathcal{H}_3,\ldots$ граде област између бесконачних изломљених линија
$\mathcal{L}_0 : \ \ldots A_{-2}F_{-2}A_{-1}F_{-1}A_0F_0A_1F_1A_2F_2\ldots$ и
$\mathcal{D}_0 : \ \ldots C_{-2}D_{-2}C_{-1}D_{-1}C_0D_0C_1D_1C_2D_2\ldots$.
Назовимо ову област „изломљена трака“ - $\mathcal{T}_0$. Приметимо да за рубне изломљене линије $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{D}_0$ ове изломљене траке $\mathcal{T}_0$ важи да се једна од друге могу добити транслацијом за вектор $\overrightarrow{A_0C_0}$. Ако сада са $\mathcal{T}_i$ означимо изломљену траку добијену транслацијом изломљене траке $\mathcal{T}_0$ за вектор $i \cdot \overrightarrow{A_0C_0}$, $i \in \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$, добијамо низ изломљених трака $\ldots,\mathcal{T}_{-2},\mathcal{T}_{-1},\mathcal{T}_0,\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2,\ldots$ које одређују једно разбијање равни на изломљене траке подударне траци $\mathcal{T}_0$. Како је трака $\mathcal{T}_0$ разбијена на шестоуглове подударне шестоуглу $\mathcal{H}_0$, то се и свака од ових трака може разбити на шестоуглове подударне шестоуглу $\mathcal{H}_0$. Тиме добијамо једнотипни тајлинг чија је свака плочица подударна шестоуглу $\mathcal{H}_0$. □



Задатак 6. *Доказати да за произвољни петоугао са две паралелне странице постоји једнотипни тајлинг чије су све плочице подударне овом петоуглу.*

Доказ. Посматрајмо један произвољни петоугао $A_0B_0C_0D_0E_0$ при чему су странице A_0E_0 и B_0C_0 паралелне. Означимо га са $\mathcal{P}_0$ а са $\mathcal{P}_i$ петоугао $A_iB_iC_iD_iE_i$ који се добија од $\mathcal{P}_0$ транслацијом за вектор $i \cdot \overrightarrow{C_0E_0}$, где је $i \in \{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$. Приметимо да су тачке A_i, B_{i+1} и $E_i \equiv C_{i+1}$ ($i \in \{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$) колинеарне.



Петоуглови $\dots,\mathcal{P}_{-3},\mathcal{P}_{-2},\mathcal{P}_{-1},\mathcal{P}_0,\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2,\mathcal{P}_3,\dots$ граде област између бесконачних изломљених линија $\mathcal{L}_0 : \dots B_{-2}A_{-2}B_{-1}A_{-1}B_0A_0B_1A_1B_2A_2\dots$ и $\mathcal{D}_0 : \dots C_{-2}D_{-2}C_{-1}D_{-1}C_0D_0C_1D_1C_2D_2\dots$. Назовимо ову област „изломљена трака" - $\mathcal{T}_0$. Приметимо да $\angle C_iD_iC_{i+1} \cong \angle D_iC_{i+1}D_{i+1}$ за све $i \in \{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$, тј. да се централном симетријом са центром у средишту дужи C_0D_0 бесконачна изломљена линија $\mathcal{D}_0$ пресликава (неидентички) у себе. При томе се бесконачна изломљена линија $\mathcal{L}_0 : \dots B_{-2}A_{-2}B_{-1}A_{-1}B_0A_0B_1A_1B_2A_2\dots$ пресликава у неку бесконачну изломљену линију $\mathcal{L}_1 : \dots B'_{-2}A'_{-2}B'_{-1}A'_{-1}B'_0A'_0B'_1A'_1B'_2A'_2\dots$, а изломљена трака $\mathcal{T}_0$ у изломљену траку $\mathcal{T}_1$ са којом има заједничку ивичну изломљену линију $\mathcal{D}_0$. Ако посматрамо унију ових изломљених трака добијамо траку $\mathcal{T}_0^*$ чије су рубне изломљене линије $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{L}_1$ такве да се једна од друге могу добити транслацијом. Имамо ситуацију као из претходног задатка. Дакле, цела раван се може разбити на изломљене траке које су подударне траци $\mathcal{T}_0^* = \mathcal{T}_0 \cup \mathcal{T}_1$. Свака од тих трака се може даље поделити на две подударне (међусобно централно симетричне) траке - обе подударне траци $\mathcal{T}_0$; а свака од ових на један бесконачни низ полигона подударних полигону $\mathcal{P}_0$ □

Задатак 7. *Нека је руб полигона $\mathcal{P}$ издељен на 6 изломљених линија помоћу 6 тачака руба A, B, C, D, E и F, датих у цикличном реду. Ако постоји транслација која пресликава изломљену линију $\widehat{AB}$ на изломљену линију $\widehat{ED}$, транслација која пресликава $\widehat{BC}$ на $\widehat{FE}$ и транслација која пресликава $\widehat{CD}$ на $\widehat{AF}$ доказати да онда постоји једнотипни тајлинг чија је свака плочица подударна овом полигону.*

Доказ. Вршећи транслацију полигона $\mathcal{P}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}$ за векторе $i\,\overrightarrow{AE}$, за све $i \in \{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$, добијамо низ полигона $\dots,\mathcal{P}_{-2},\mathcal{P}_{-1},\mathcal{P}_0,\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2,\dots$, чија унија представља изломљену траку $\mathcal{T}$ чије се ивичне изломљене линије могу једна од друге добити транслацијом (за вектор $\overrightarrow{AC}$). Како се раван може разбити на изломљене траке подударне овој траци, и како је она разбијена на шестоуглове подударне полазном $ABCDEF$, то разбијајући сваку од тих трака на шестоуглове, према разбијању траке $\mathcal{T}$, добијамо и једнотипни тајлинг чија је свака плочица подударна шестоуглу $ABCDEF$. □

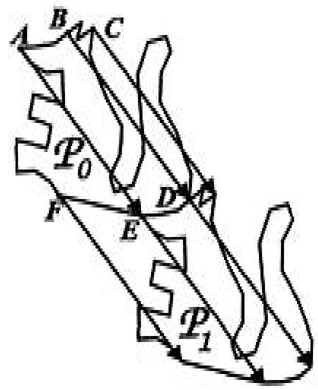
Задатак 8. *Нека је руб полигона $\mathcal{P}$ издељен на 6 изломљених линија тачкама руба A, B, C, D, E и F, датих у цикличном реду. Ако постоји транслација која пресликава изломљену линију $\widehat{AB}$ на изломљену линију $\widehat{ED}$ и ако је свака од четири преостале изломљене линије $\widehat{BC}, \widehat{CD}, \widehat{EF}$ и $\widehat{FA}$ централносиметрична, доказати да онда постоји једнотипни тајлинг чија је свака плочица подударна овом полигону.*

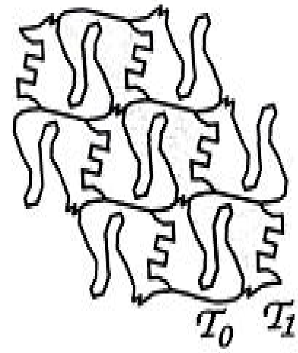
Доказ. Означимо са $\mathcal{P}_i$ ($i \in \{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$) полигон добијен транслацијом за вектор $i \cdot \overrightarrow{AE}$. Одговарајуће тачке за A, B, C, D, E и F приликом ове транслације означимо редом са A_i, B_i, C_i, D_i, E_i и F_i. Приметимо да је $E_i \equiv A_{i+1}$, $D_i \equiv B_{i+1}$, за све $i \in \{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$. Унија полигона $\dots, \mathcal{P}_{-2}, \mathcal{P}_{-1}, \mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots$ представља изломљену траку $\mathcal{T}_0$ са ивичним изломљеним линијама

$$\dots \widehat{B_{-2}\dots C_{-2}}\dots\widehat{B_{-1}\dots C_{-1}}\dots\widehat{B_0\dots C_0}\dots\widehat{B_1\dots C_1}\dots\widehat{B_2\dots C_2}\dots\dots$$

и

$$\dots \widehat{A_{-2}\dots F_{-2}}\dots\widehat{A_{-1}\dots F_{-1}}\dots\widehat{A_0\dots F_0}\dots\widehat{A_1\dots F_1}\dots\widehat{A_2\dots F_2}\dots\dots$$

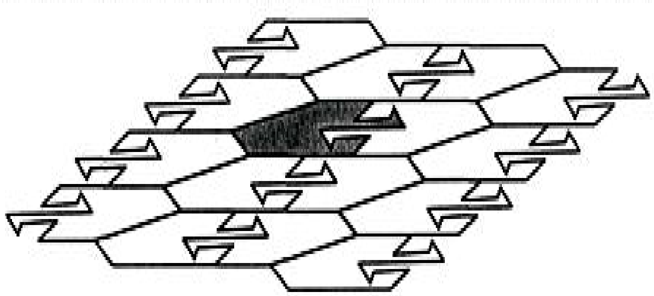




Приметимо да су ове ивичне изломљене линије централно симетричне, те се централном симетријом, рецимо, са центром у средишту дужи BC трака $\mathcal{T}_0$ се пресликава у неку траку $\mathcal{T}_0'$ са којом гради (уједно и разбија) траку $\mathcal{T}_0^*$. Како добијена трака $\mathcal{T}_0^*$ има ивичне изломљене линије које се могу једна од друге добити транслацијом, то се раван може разбити на низ изломљених трака $\dots, \mathcal{T}_{-2}^*, \mathcal{T}_{-1}^*, \mathcal{T}_0^*, \mathcal{T}_1^*, \mathcal{T}_2^*, \dots$, при чему је свака подударна траци $\mathcal{T}_0^*$ (и добијена њеном транслацијом). Свака од ових трака се може, по угледу на разбијање траке $\mathcal{T}_0^*$, разбити на полигоне подударне полигону $\mathcal{P}$. □

Задатак 9. *Одредити једнотипни тајлинг чија је свака плочица тринаестоугао.*

Решење. Да бисмо добили полигон са непарним бројем страна за који постоји једнотипни тајлинг са плочицама које су подударне овом полигону можемо се послужити петоуглом из зад. 6. Довољно би било уместо једне (или више њих) од његових непаралелних страница посматрати централносиметричну изломљену линију са довољним бројем убачених нових темена. Пример приказан на слици је само једно од великог броја могућих решења.



Задатак 9. *Одредити број различитих триангулација конвексног десетоугла.*

Решење Скуп свих триангулација n-тоугла $A_1A_2\dots A_n$ ћемо поделити на међусобно дисјунктне класе према избору трећег темена троугла посматране триангулације који садржи страницу A_1A_n. Ако са t_n означимо број триангулација конвексног n-тоугла $(n \geqslant 3)$, тада број триангулација у којима учествује троугао $A_1A_2A_k$ $(3 \leqslant k \leqslant n)$ износи, према принципу производа, $t_{k-1}t_{n-k+2}$ $(t_2 \stackrel{\text{def}}{=} 1)$. Примењујући сада принцип збира добијамо да низ $\{t_n\}_{n\in N}$ задовољава рекурентну формулу $t_n = \sum\limits_{k=3}^{n} t_{k-1}t_{n-k+2}$, са почетним условима $t_2 = t_3 = 1$, $t_4 = 2$. Примењујући наведену формулу долазимо до вредности за број триангулација конвексног десетоугла $t_{10} = 1430$. Иначе, чланови низа t_n представљају чланове Каталанових бројева $C_n \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$, при чему је $t_n = C_{n-2} = \dfrac{1}{n-1}\dbinom{2n-4}{n-2}$.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2005/06 година