Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус

Илија Јанев
Скопје

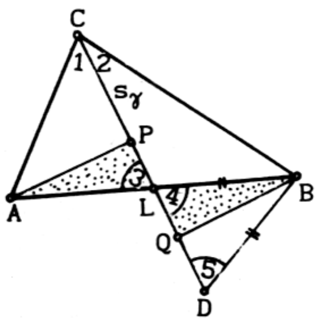
ЕДНА ЗАДАЧА - МНОГУ РЕШЕНИЈА

Англискиот математичар В.В.Совгер рекол: "Покорисно е да се реши една иста задача на три различни начини, отколку да се решат три задачи на еден ист начин. Со решавањето на една иста задача на повеќе начини, се согледува кој од нив е најкраток, најефектен и најелегантен. Така,се гради стил и вештина за решавање на задачи".

Скромно ќе се осмелиме да го коригираме Совгер велејќи: "Подобро е да решиме една задача на 8 начини отколку 8 задачи на еден начин". Ова искажување ќе го поткрепиме со повеќе докази на една теорема од геометријата.

Теорема: Во секој триаголник симетралата на кој било внатрешен агол ја дели спротивната страна на отсечки пропорционални на налегнатите страни на тој агол.

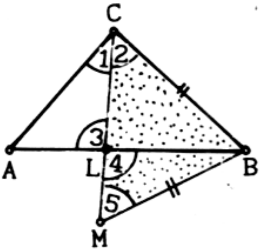
Симетралата s_γ на внатрешниот агол γ на триаголникот ABC нека ја сече страната AB во точката L (црт. 1). Треба да докажеме дека
$\overline{AC}:\overline{BC} = \overline{AL}:\overline{LB}$.



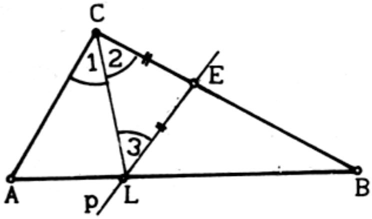
Прв доказ: На симетралата s_γ ја избираме точката D, така што $\overline{BD} = \overline{BL}$. Тогаш $\measuredangle 4 = \measuredangle 5$, а бидејќи $\measuredangle 4 = \measuredangle 3$ (како накрсни агли) следува $\measuredangle 3 = \measuredangle 5$. Имајќи предвид дека $\measuredangle 1 = \measuredangle 2$ заклучуваме дека $\Delta ALC \sim \Delta BDC$. Тогаш $\overline{AC}:\overline{BC} = \overline{AL}:\overline{BD}$ од каде што, поради $\overline{BD} = \overline{BL}$, конечно добиваме
$\overline{AC}:\overline{BC} = \overline{AL}:\overline{BL}$.

Втор доказ: Од темињата A и B ги спуштаме нормалите на симетралата s_γ; нивните подножја ги означуваме со P и Q (црт. 1). Тогаш очигледно $\Delta APL \sim \Delta BQL$ и $\Delta APC \sim \Delta BQC$, а оттука $\overline{AL}:\overline{BL} = \overline{AP}:\overline{BQ}$ и $\overline{AC}:\overline{BC} = \overline{AP}:\overline{BQ}$, односно $\overline{AB}:\overline{BC} = \overline{AL}:\overline{BL}$.

Трет доказ: На симетралата s_γ ја избираме точката M, но таква што да $\overline{BM} = \overline{BC}$ (црт.2). Оттука $\measuredangle 2 = \measuredangle 5$, како агли при основата на рамнокракиот ΔCMB, па поради $\measuredangle 2 = \measuredangle 1$ следува $\measuredangle 1 = \measuredangle 5$. Понатаму $\measuredangle 3 = \measuredangle 4$, од каде што следува дека е $\Delta ALC \sim \Delta BLM$, а оттука $\overline{AC}:\overline{AL} = \overline{BM}:\overline{BL}$. Но $\overline{BM} = \overline{BC}$, па конечно добиваме $\overline{AC}:\overline{BC} = \overline{AL}:\overline{BL}$.



Црт. 2.



Црт. 3.

Четврти доказ: Од точката L ја повлекуваме правата **p** паралелна со страните AC, а нејзиниот пресек со страната BC нека е точката E (црт. 3). Тогаш очигледно $\Delta ABC \sim \Delta LBE$, од каде што

(1) $$\overline{AC}:\overline{BC} = \overline{LE}:\overline{BE}$$

Понатаму од $\measuredangle 1 = \measuredangle 2$ и $\measuredangle 1 = \measuredangle 3$ (како наизменични) следува $\measuredangle 2 = \measuredangle 3$, т.е. ΔCLE е рамнокрак, па следува

(2) $$\overline{LE} = \overline{CE}.$$

Од (1) и (2) следува

(3) $$\overline{AC}:\overline{BC} = \overline{CE}:\overline{BE}$$

Но според Талесовата теорема имаме

(4) $$\overline{CE}:\overline{BE} = \overline{AL}:\overline{LB}.$$

Конечно, од (3) и (4) следува

$$\overline{AC}:\overline{BC} = \overline{AL}:\overline{LB}.$$

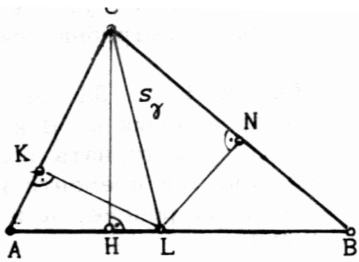
Овде ќе прекинеме, а од вас драги млади математичари очекуваме нови докази за оваа теорема, кои ќе ги објавиме во наредниот број, а решавачите ќе ги наградиме со една математичка книга.

Петти доказ: Симетралата CL на аголот γ го дели ΔABC на два триаголника ACL и BCL (црт. 4). Нивните плоштини се:

$$P_{ACL} = \frac{1}{2}\cdot\overline{AL}\cdot\overline{CH} \quad \text{и}$$

$$P_{BCL} = \frac{1}{2}\cdot\overline{LB}\cdot\overline{CH}, \quad \text{а}$$

односот на плоштината е



Црт. 4

(1) $\quad P_{ACL} : P_{BCL} = \overline{AL} : \overline{LB}$

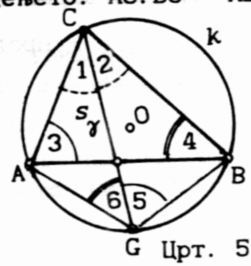
Од друга страна, пак, за истите плоштини имаме:

$P_{ACL} = \frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{LK}$ и $P_{BCL} = \frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{LN}$, а за нивниот однос, бидејќи $\overline{LK} = \overline{LN}$ (својство на симетралата на даден агол) добиваме:

(2) $\quad P_{ACL} : P_{BCL} = \overline{AC} : \overline{BC}$.

Од (1) и (2) следува тврдењето: $\overline{AC} : \overline{BC} = \overline{AL} : \overline{LB}$.

Шести доказ: Нека k е опишаната кружница околу ΔABC, а G пресечната точка на таа кружница со симетрала s_γ (црт. 5).



Црт. 5

Тогаш од $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ и $\sphericalangle 6 = \sphericalangle 4$ (како периферески агли над ист лак) следува дека $\Delta ACG \sim \Delta LCB$, а оттука $\overline{AC}:\overline{AG} = \overline{LC}\cdot\overline{LB}$, т.е.

(1) $\overline{AC}\cdot\overline{LB} = \overline{LC}\cdot\overline{AG}$.

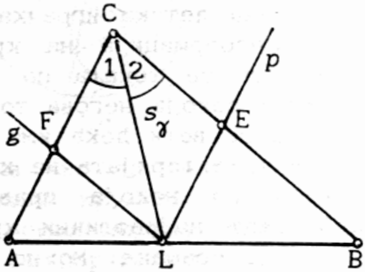
Слично, од $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ и $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 5$ следува дека $\Delta ALC \sim \Delta GBC$ а оттука $\overline{AL}:\overline{LC} = \overline{GB}:\overline{BC}$, т.е.

(2) $\overline{AL}\cdot\overline{BC} = \overline{LC}\cdot\overline{GB}$.

Бидејќи $\overline{AG} = \overline{BG}$, како тетиви над еднакви перифериски агли, тогаш од (1) и (2) добиваме $\overline{AC}\cdot\overline{LB} = \overline{AL}\cdot\overline{BC}$, т.е. тврдењето:

$\overline{AB}:\overline{BC} = \overline{AL}:\overline{LB}$.

Седми доказ: Низ точката L повлекуваме две прави: $p \parallel AC$ и $g \parallel BC$. Тие ги сечат страните BC и AC во точките E и F соодветно (црт. 6). Лесно се докажува дека четириаголникот LECF е ромб, т.е.



Црт. 6

(1) $\overline{LE} = \overline{LF}$.

Очигледна е и сличноста на триаголниците ABC, ALF и LBE. Од $\Delta ALF \sim \Delta LBE$ следува дека $\overline{AL}:\overline{LB} = \overline{LF}:\overline{BE}$, од каде што, имајќи предвид (1) добиваме:

(2) $\overline{AL}:\overline{LB} = \overline{LE}:\overline{BE}$.

Од $\Delta ABC \sim \Delta LBE$ следува

(3) $\overline{AC}:\overline{BC} = \overline{LE}:\overline{BE}$.

Конечно, од (2) и (3) следува тврдењето:

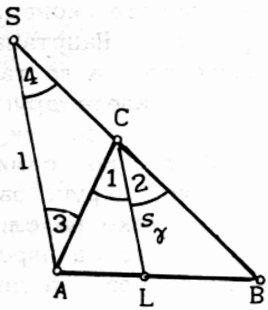
$\overline{AC}:\overline{BC} = \overline{AL}:\overline{LB}$.

Осми доказ: Низ темето A на ΔABC повлекуваме права $l \parallel s_\gamma$ до пресекот S со продолжението на страната BC (црт. 7) Тогаш од $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$, како наизменични и $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 4$, како согласни, следува дека $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$, т.е. триаголникот ASC е рамнокрак, а оттука:

(1) $\overline{AC} = \overline{SC}$.

Според Талесовата теорема имаме:

(2) $\overline{SC}:\overline{CB} = \overline{AL}:\overline{LB}$.



Црт. 7

Од (1) и (2) следува тврдењето:

$\overline{AC}:\overline{BC} = \overline{AL}:\overline{LB}$

Според идејата на моите ученици Рубинчо и Велибор.