12-я Международная Жаутыковская олимпиада, 2016 год

1. Диагонали четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность с центром O, пересекаются в точке M. Описанная окружность треугольника ABM пересекает стороны AD и BC в точках N и K соответственно. Докажите, что четырёхугольники $NOMD$ и $KOMC$ имеют равные площади. *(С. Гроздев)*

Решение. Пусть ω_1 — описанная окружность четырёхугольника $ABCD$, а ω_2 — описанная окружность треугольника ABM. Углы CAD и DBC опираются на одну дугу окружности ω_1 и поэтому равны. Отсюда следует, что хорды MN и MK, на которые эти углы опираются в ω_2, также равны. Отрезки OD и OC равны как радиусы ω_1 Пусть t — касательная прямая к окружности ω_1 в точке D. Угол между t и AD равен $\sphericalangle ABD$ (потому что оба равны половине дуги AD) и, следовательно, равен MND (так как четырёхугольник $ABMN$ вписанный). Таким образом, отрезок MN параллелен t, значит, перпендикулярен OD. Аналогично отрезок MK перпендикулярен OC. Следовательно, площади четырёхугольников $NOMD$ и $KOMC$ равны, так как соответственные диагонали этих четырёхугольников равны и в обоих четырёхугольниках диагонали перпендикулярны. (matol.kz)

2. Числа a_1, a_2, …, a_{100} — перестановка чисел от 1 до 100. Пусть $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_{100} = a_1 + a_2 + \ldots a_{100}$. Какое наибольшее количество точных квадратов могло оказаться среди чисел S_1, S_2, …, S_{100}? *(Н. Седракян)*

Решение. Ответ: 60.

Добавим к последовательности S_1, S_2, …, S_{100} начальный член $S_0 = 0$ и рассмотрим все члены $S_{n_0} < S_{n_1} < \ldots$, являющиеся квадратами: $S_{n_k} = m_k^2$ (в частности, $n_0 = m_0 = 0$). Так как $S_{100} = 5050 < 72^2$, все m_k не больше 71. Если $m_{k+1} = m_k + 1$, то $S_{n_{k+1}} - S_{n_k} = 2m_k + 1$ нечётно, поэтому среди чисел $a_{n_k+1}, \ldots, a_{n_{k+1}}$ есть нечётное. Так как нечётных чисел, не превосходящих 100, всего 50, то среди разностей $m_{k+1} - m_k$, не более 50 равных 1. Если в исходной последовательности найдётся 61 квадрат, то

$$m_{61} = (m_{61} - m_{60}) + (m_{60} - m_{59}) + \ldots + (m_1 - m_0) \geqslant 50 + 11 \cdot 2 = 72,$$

что невозможно.

Пример последовательности, в которой 60 квадратов, строится, например, так. Положим $a_i = 2i - 1$ при $1 \leqslant i \leqslant 50$, тогда мы используем все нечётные числа, а $S_i = i^2$. Далее, возьмём $a_{51+4i} = 2 + 8i$, $a_{52+4i} = 100 - 4i$, $a_{53+4i} = 4 + 8i$, $a_{54+4i} = 98 - 4i$ при $0 \leqslant i \leqslant 7$, при этом будут использованы все чётные числа от 70 до 100 и все числа, дающие остатки 2 и 4 при делении на 8, от 2 до 60, а $S_{54+4i} - S_{50+4i} = 204 + 8i$, поэтому $S_{54+4i} = (52 + 2i)^2$. Наконец, последними 18 членами последовательности будут 30, 40, 64, 66, 68, 6, 8, 14, 16, 32, 38, 46, 54, 62, 22, 24, 48, 56. Это даёт $S_{87} = 66^2 + 2 \cdot 134 = 68^2$, $S_{96} = 70^2$. (matol.kz)

3. В Графландии 60 городов, каждые два из которых соединены дорогой с односторонним движением. Докажите, что можно покрасить четыре города в красный цвет, а другие четыре — в зелёный так, чтобы каждая дорога, соединяющая красный город с зелёным, была направлена от красного к зелёному. *(А. Голованов)*

Решение. Скажем, что город A *обслуживает* четвёрку городов B_1, B_2, B_3, B_4, если из него ведут дороги во все эти четыре города. Если всего из города выходит k дорог, то он обслуживает C_k^4 четвёрок (мы считаем $C_k^4 = 0$ при $k < 4$). Пусть количества дорог, выходящих из всех городов — k_1, k_2, …, k_{60}. Сумма этих количеств равна числу всех дорог $C_{60}^2 = 30 \cdot 59$. Сумма количеств четвёрок, обслуживаемых всеми городами, равна $S = C_{k_1}^4 + C_{k_2}^4 + \ldots C_{k_{60}}^4$. Докажем, что наименьшее значение этой суммы при условии $k_1 + k_2 + \ldots + k_{60} = 30 \cdot 59$ равно $30 \cdot C_{30}^4 + 30 \cdot C_{29}^4$. Действительно, множество наборов целых неотрицательных k_i с суммой $30 \cdot 59$ конечно, поэтому один из них доставляет наименьшее значение этой суммы. Предположим, что в этом наборе есть два числа

$m \geq 4$ и n, для которых $m - n \geqslant 2$. Тогда замена m и n на $m-1$ и $n+1$ уменьшит нашу сумму (так как $C_m^4 + C_n^4 - C_{m-1}^4 - C_{n+1}^4 = C_{m-1}^4 - C_n^3 > 0$). Таким образом, наименьшее значение суммы S достигается для набора k_i, никакие два из которых не отличаются более, чем на 1. Такой набор, очевидно, только один, и состоит из 30 чисел, равных 30 и 30 чисел, равных 29.

Итак, все 60 городов вместе обслуживают не менее $30 \cdot C_{30}^4 + 30 \cdot C_{29}^4$ четвёрок. Но это число, как легко проверить, больше, чем $3 \cdot C_{60}^4$, то есть утроенное количество всех четвёрок. Поэтому есть четвёрка, которую обслуживают хотя бы четыре города, что и требовалось доказать. (matol.kz)

4. Найдите все $k > 0$, при которых существует строго убывающая функция $g : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ такая, что $g(x) \geqslant kg(x + g(x))$ при всех положительных x. *(Ш.Н. Исмаилов)*

<u>*Решение.*</u> То, что все $k \leqslant 1$ удовлетворяют условию задачи, следует из того, что для любой убывающей функции g, например, $g(x) = \frac{1}{x}$, выполнено неравенство $g(x) > g(x+g(x)) \geqslant kg(x+g(x))$.

Предположим, что функция g удовлетворяет условию задачи при некотором $k > 1$. Положим $s = \frac{1}{k}$, тогда $g(x + g(x)) \leqslant sg(x)$.

Определим последовательность (x_n) условиями $x_0 = x$, $x_{n+1} = x_n + g(x_n)$. По условию $g(x_{n+1}) \leqslant sg(x_n)$, поэтому $g(x_n) \leqslant s^n g(x)$. Так как

$$x_n = x_0 + g(x_0) + g(x_1) + \cdots + g(x_{n-1}) \leqslant x + g(x) + sg(x) + \cdots + s^{n-1}g(x) =$$

$$= x + (1 + s + \cdots + s^{n-1})g(x) < x + \frac{1}{1-s}g(x),$$

имеем $g(x_n) > g(x + \frac{1}{1-s}g(x))$. Следовательно, $g(x + \frac{1}{1-s}g(x)) < s^n g(x)$ при любом натуральном n, что, очевидно, невозможно, так как $g(x + \frac{1}{1-s}g(x)) > 0$. Полученное противоречие и доказывает, что случай $k > 1$ невозможен. (matol.kz)

5. Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$, в котором $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel FA$. Точки M, N и K — точки пересечения прямых BD и AE, AC и DF, CE и BF соответственно. Докажите, что перпендикуляры, проведенные из точек M, N и K к прямым AB, CD и EF соответственно, пересекаются в одной точке. *(Н. Седракян)*

<u>*Решение.*</u> Нам потребуется следующая

Лемма. Пусть T — точка пересечения продолжений боковых сторон PS и QR трапеции $PQRS$. Тогда радикальная ось окружностей, построенных на диагоналях PR и QS, как на диаметрах, есть высота треугольника TPQ, опущенная из вершины T.

Доказательство. Рассмотрим наряду с окружностями ω_1 и ω_2, построенными на PR и QS, как на диаметрах, окружность ω с диаметром PQ. Общая хорда ω и ω_1 — это высота, опущенная из P на QR, а общая хорда ω и ω_2 — это высота, опущенная из Q на PR. Точка пересечения этих высот, ортоцентр треугольника TPQ, имеет равные степени относительно окружностей ω_1 и ω_2, а потому лежит на их радикальной оси. Аналогично на их радикальной оси лежит ортоцентр треугольника TRS. Поскольку перпендикуляр, опущенный из T на PQ, проходит через оба этих ортоцентра, он и является радикальной осью ω_1 и ω_2. $\square$

Применяя лемму к трапеции $ABDE$, мы найдём, что перпендикуляр, опущенный из M на AB, является радикальной осью окружностей, построенных на AD и BE, как на диаметрах. Аналогично, рассматривая трапеции $CDFA$ и $EFBC$, мы получим, что перпендикуляр, опущенный из N на CD, есть радикальная ось окружностей, построенных на AD и CF, а перпендикуляр, опущенный из K на EF, есть радикальная ось окружностей, построенных на CF и BE, как на диаметрах. Следовательно, эти три перпендикуляра (среди которых, очевидно, нет параллельных) пересекаются в одной точке — радикальном центре этих трёх окружностей. (matol.kz)

6. Натуральное число q назовём *удобным знаменателем* для вещественного числа α, если $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{10q}$ при некотором целом p. Докажите, что если у двух иррациональных чисел α и β множества удобных знаменателей совпадают, то $\alpha + \beta$ или $\alpha - \beta$ — целое число. *(А. Голованов)*

<u>Решение.</u> Пусть $q_1 < q_2 < \ldots$ — все удобные знаменатели для чисел α и β. Очевидно, для каждого q_i существует только одно целое p_i такое, что $|q_i\alpha - p_i| < \frac{1}{10}$, это p_i мы назовём соответствующим q_i *удобным числителем.*

Сначала разберём случай, когда $0 < \alpha, \beta < \frac{1}{10}$. Пусть $p_1 < p_2 < \ldots$ — удобные числители для α, а $p'_1 < p'_2 < \ldots$ — удобные числители для β. Докажем индукцией по i, что $p_i = p'_i$ при всех натуральных i. Очевидно, $p_1 = p'_1 = 0$. Пусть $p_k = p'_k$. Если $q_{k+1} = q_k + 1$, то $p_{k+1} = p_k$ (так как $|p_k - q_k\alpha| < \frac{1}{10}$ и $|p_{k+1} - q_{k+1}\alpha| = |p_k - q_k\alpha - \alpha| < \frac{1}{10}$) и аналогично $p'_{k+1} = p'_k$, откуда $p_{k+1} = p'_{k+1}$. Если же $q_{k+1} > q_k + 1$, то $p_{k+1} = p_k + 1$. Действительно, в возрастающей арифметической прогрессии с первым членом $(q_k + 1)\alpha$ и разностью $\alpha < \frac{1}{10}$ первый член меньше $(p_k + 1) - \frac{1}{10}$, следовательно, должны быть и члены, отстоящие от $p_k + 1$ менее, чем на $\frac{1}{10}$. Аналогично $p'_{k+1} = p'_k + 1$, и наше утверждение доказано.

Поскольку $|q_k\alpha - p_k| < \frac{1}{10}$ и $|q_k\beta - p_k| < \frac{1}{10}$, получаем, что $|q_k(\alpha - \beta)| < \frac{1}{5}$ при всех k, откуда $\alpha = \beta$.

В случае, когда α и β произвольны, рассмотрим числа $q_1\alpha$ и $q_1\beta$. Изменяя при необходимости знаки, мы можем считать, что $0 < \{q_1\alpha\}, \{q_1\beta\} < \frac{1}{10}$. Поскольку для чисел $q_1\alpha$ и $q_1\beta$ условие задачи также выполнено, оно выполнено и для чисел $\{q_1\alpha\}$ и $\{q_1\beta\}$, поэтому $\{q_1\alpha\} = \{q_1\beta\}$. Это означает, что $q_1\alpha - q_1\beta = r$ — целое число, то есть разность $\alpha - \beta = \frac{r}{q_1}$ рациональна.

Предположим, что число $\frac{r}{q_1}$ не целое. Тогда $\frac{1}{3} \leqslant \{\frac{kr}{q_1}\} \leqslant \frac{2}{3}$ для некоторого k. Воспользуемся тем, что для любых u и v, $0 \leqslant u < v \leqslant 1$, в любой арифметической прогрессии с иррациональной разностью ϑ существует член, дробная часть которого лежит на интервале (u, v). В частности, для некоторого натурального n число $(nq_1 + k)\alpha$ отстоит от ближайшего целого менее, чем на $\frac{1}{10}$. Но при этом и $(nq_1 + k)\beta$ должно отстоять от ближайшего целого менее, чем на $\frac{1}{10}$, что противоречит тому, что $\{(nq_1 + k)\alpha - (nq_1 + k)\beta\} = \{nr + \frac{kr}{q_1}\} \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$. (matol.kz)