XXXVI РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

IV одделение

Задача 1. Куќите во една улица се нумерирани со броевите од 1 до 100. Колку пати во броевите на куќите се јавува цифрата 7? Испиши ги сите такви броеви.

Решение. Броеви од 1 до 100 кои во својот запис имаат седумка се броевите 7, 17, 27, 37, 47, 57, 67, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 87 и 97. Значи цифрата 7 се јавува вкупно 20 пати.

Задача 2.Бројот 509 има збир на цифри 14, бидејќи $5+0+9=14$. Определи го најголемиот трицифрен број чиј збир на цифрите е 12 и најди го најмалиот трицифрен број чиј збир на цифрите е 21? Определи ја разликата меѓу овие два броја.

Решение. За бараниот трицифрен број да е најголем, треба цифрата на стотките да е најголема, што значи да е 9. Тогаш, збирот на останатите две цифри треба да биде 3. Бидејќи $3=3+0=2+1=1+2=0+3$, следува дека најголемиот број формиран од овие цифри е 930.

За бараниот трицифрен број да биде најмал, цифрата на стотките треба да е 1, но тогаш збирот на останатите две цифри ќе биде 20, што не е можно, бидејќи најмногу може да биде 18, ако се двете цифри деветки. Исто важи и ако цифрата на стотките е 2, не е можно. Значи, цифрата на стотките е 3. Сега збирот на другите две цифри треба да биде 18, што значи дека бараниот број е 399.

Разликата на овие броеви е $930-399=531$.

Задача 3. На тениски турнир учествувале 5 тенисери. Секој тенисер со секој од останатите тенисери изграл по една игра.

а) Колку игри вкупно се изиграле на турнирот?

б) Колку игри изиграл секој од тенисерите?

Решение. Играчите да ги означиме со буквите A, B, C, D и E. Играчот A изиграл 4 игри со преостанатите четири играчи: B, C, D и E. Играчот B изиграл 4 игри со играчите A (оваа игра веќе ја броевме), C, D и E. Играчот C изиграл четири игри со играчите A, B (овие игри веќе ги броевме), D и E. Играчот D изиграл четири игри со играчите A, B, C

(овие игри веќе ги броевме) и E. Играчот E изиграл четири игри (сите веќе ги броевме).

а) На турнитор се изиграни $4+3+2+1=10$ игри.

б) Секој играч изиграл по 4 игри.

Задача 4. По улица одела Тамара и ја поздравила Сашка која стоела на тротоарот. Откако поминала 30 *m*, по неа тргнала Сашка. После колку чекори Сашка ќе ја престигне Тамара, ако должината на чекорот на Сашка е 85 *cm*, а должината на чекорот на Тамара е 75 *cm*? Образложи го својот одговор!

Решение. Со секој изминат чекор Сашка ја пристигнува Танара за $85-75=10\,cm$. Предноста на Тамара е $30\cdot 100=3000\,cm$. Сашка ќе ја стигне Тамара по $3000:10=300$ чекори.

Задача 5. Во едно оддление има 30 ученици. За украсување на училиштето по повод патрониот празник тие направиле 958 украси. Секој направил непарен број украси, повеќе од еден. Дали е точно дека секои два ученика направиле различен број украси?

Решение. Да допуштиме, дека секои два ученика направиле различен број украси и да најдеме колку може да биде најмалиот вкупен број направени украси. Нека првиот ученик најмалку направил 3 украси, вториот ученик најмалку направил $5=2\cdot 2+1$ украси итн. последниот (триесеттиот) ученик направил $30\cdot 2+1=61$ украси. Значи, сите ученици вкупно треба да направат најмалку $3+5+7+...+61=960$ украси. Но, $958<960$ и затоа не е можно секои два ученика да направиле различен број, т.е. има барем два ученика, кои направиле еднаков број украси.

V одделение

Задача 1. Збирот на два броја е еднаков на 960, а нивниот количник е еднаков на 5. Кое се тие броеви?

Решение. Нека помалиот од двата броја го означиме со x. Бидејќи количникот на броевите е 5, заклучуваме дека поголемиот број е $5x$. Сега од условот на задачата следува дека $x+5x=960$. Според тоа, $6x=960$, т.е. $x=960:6=160$, па затоа $5x=5\cdot 160=800$. Конечно, бараните броеви се 160 и 800.

Задача 2. Ученик располага со 16 сламки со должина $1cm$, 6 сламки со должина $2cm$ и 7 сламки со должина $3cm$. Дали може со сламките со кои располага ученикот да состави правоаголник така што сите сламки да бидат употребени и сламките да не се крошат.

Решение. Ако ги употребиме сите сламки за периметарот на правоаголникот ќе добиеме $16\cdot 1+6\cdot 2+7\cdot 3=16+12+21=49$. Бидејќи $L=2(a+b)$ добиваме дека $a+b=24,5$ што не е можно бидејќи сламките не смеат да се кршат.

Задача 3. Дешифрирај го бројниот ребус $\overline{ABB}+\overline{BB}=\overline{BBA}$, каде различните букви претставуваат различни цифри, а еднаквите букви еднакви цифри.

Решение. Ако броевите во даденото равенство ги запишеме во развиена форма добиваме

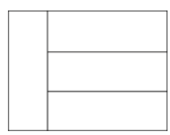
$$100A+10B+B+10B+B=100B+10B+A$$
$$9A=8B.$$

Но, A и B се цифри, па затоа од последното равенство следува $A=8$ и $B=9$ т.е. $899+99=998$.

Задача 4. Колку шестцифрени броеви постојат кои започнуваат со 2018, а колку шестцифрени броеви постојат кои завршуваат со 2018. Кои се повеќе?

Решение: Шестцифрени броеви кои започнуваат со 2018 се од облик $\overline{2018ab}$, каде $a=\{0,1,...,9\}$ и $b=\{0,1,...,9\}$. Такви има $10\cdot 10=100$ броеви. Додека пак, шестцифрени броеви кои завршуваат со 2018 се од облик $\overline{mn2018}$, каде $m=\{1,...,9\}$ и $n=\{0,1,...,9\}$. Такви има $9\cdot 10=90$ броја, што значи дека тие се помалку од оние кои завршуваат со 2018.

Задача 5. Четири еднакви правоаголници се залепени и формираат поголем правоаголник (цртеж десно). Пресметај го периметарот на поголемиот правоаголник, ако секој од четирите мали правоаголници има периметар 4 *dm*.



Решение. Според цртежот, должината на помалиот правоаголник е 3 пати од неговата ширина. Затоа, нека неговите страни се *a* и 3*a*. Тогаш, за малите правоаголници важи $L=2(a+3a)=8a$ и $L=4\,dm=40\,cm$, па затоа $8a=40\,cm$, т.е. $a=5\,cm$. Страните на големиот правоаголник се 4*a* и 3*a*, односно 20 *cm* и 15 *cm*. Значи, периметарот на големиот правоаголник е $L_g = 2(20+15) = 70\,cm.$

VI одделение

Задача 1. Драган купил 5 жетона за пукање со воздушна пушка. За секој точен подогок добива уште 2 жетони. Колку пати ја погодил целта ако пукал вкупно 17 пати.

Решение. Драган има 5 жетона, а за да пука 17 пати употребил 17 жетони. Значи, добил $17-5=12$ нови жетони. За секој погодок добива по два жетони, што значи дека целта ја погодил точно $12:2=6$ пати.

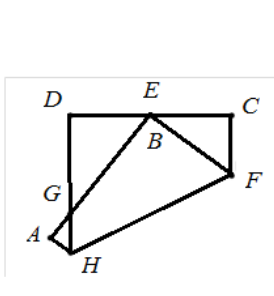
Задача 2. Определи го најмалиот природен број a таков што $378\cdot a=b\cdot b$, каде b е природен број.

Решение. За да производот $378\cdot a$ биде еднаков на производ на два исти природни броја, производот $378\cdot a$ мора да има парен број исти прости множители. Од $378=2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 7$ следува дека 2, 3 и 7 се прости множители на бројот a. Значи, $a=2\cdot 3\cdot 7$, т.е. $a=42$. Според тоа, најмалиот природен број со саканото својство е бројот 42.

Задача 3. Во $1000\,kg$ свежи јагоди има 99% вода. Во текот на транспортот испарило извесно количество од водата, така што тежината на јагодите после испарувањето на водата е $500\,kg$. Колкав процент вода содржат сега јагодите?

Решение. Во $1000\,kg$ има $\frac{99\cdot 1000}{100}=990\,kg$ вода и $10\,kg$ сува материја. После транспортот во $500\,kg$ јагоди исто така има $10\,kg$ сува материја, што значи има $490\,kg$ вода. Според тоа, после транспортот во јагодите има $\frac{490\cdot 100}{500}=98\%$ вода.

Задача 4. Даден е квадрат $ABCD$ со должина на страната 9 *cm*. Квадратот е свиткан како на цртежот десно, така што темето B се поклопува со точката E, која се наоѓа на страната $\overline{CD}$. На таков начин се добиени три триаголници: CEF, EDG и GAH. Колку е збирот на периме-



трите на трите триаголници?

Решение. Нека страната на квадратот за означиме со a. Периметарот на триаголникот CEF е $L_1=\overline{CF}+\overline{CE}+\overline{EF}$, на EDG е $L_2=\overline{DG}+\overline{DE}+\overline{EG}$, а на GAH е $L_3=\overline{AG}+\overline{GH}+\overline{AH}$.

Збирот на периметрите на трите триаголници тогаш е:

$$\begin{aligned}L_1+L_2+L_3&=\overline{CF}+\overline{CE}+\overline{EF}+\overline{DG}+\overline{DE}+\overline{EG}+\overline{AG}+\overline{GH}+\overline{AH}\\&=(\overline{CF}+\overline{EF})+(\overline{CE}+\overline{DE})+(\overline{DG}+\overline{GH}+\overline{AH})+(\overline{AG}+\overline{EG})\\&=a+a+a+a=4a=4\cdot 9=36cm\end{aligned}$$

Задача 5. Колкав агол зафаќаат часовната и минутната стрелка на часовникот во 8 часот и 10 минути?

Решение. Аголот меѓу часовната и минутната стрелка во 8:00 часот е 120°. Минутната стрелка 12 пати побрзо се движи од часовната. Од 8:00 до 8:10 часот минутната стрелка ќе се помести за агол од 60°, додека часовната ќе се помести за 12 пати помал агол, т.е. за $60^\circ:12=5^\circ$. Според тоа, аголот меѓу часовната и минутната стрелка во 8:10 минути ќе биде $120^\circ+60^\circ-5^\circ=175^\circ$.

VII одделение

Задача 1. Во два сада има $4\frac{1}{6}$ и $3\frac{1}{2}$ литри вода соодветно. Колку вода треба да се претури од првиот во вториот сад, така што после претурањето во двата сада да има исто количество вода? Образложи го својот одговор!

Решение. Во првиот сад има $\frac{25}{6}$ литри, додека во вториот сад има $\frac{7}{2}$ литри. Од условот на задачата имаме, $\frac{25}{6}-x=\frac{7}{2}+x$. Последната равенка можеме да ја запишеме како $2x=\frac{25}{6}-\frac{7}{2}$, односно $x=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. Значи, од првиот сад треба да претуриме $\frac{1}{3}$ литри во вториот сад за да имаме исто количество вода во двата сада.

Задача 2. Нека a,b и c се цели броеви такви што важи $ab=-6, ac=-10$ и $bc=15$. Најди го производот abc и броевите a,b и c.

Решение. Бидејќи a е цел број кој е делител на броевите -6 и -10 добиваме дека $a\in\{-1,1,-2,2\}$. Во случаите кога $a=1$ или $a=-1$ добиваме дека $bc=60$, што не е точно. Ако $a=2$, тогаш $b=-3$ и $c=-5$, па $bc=15$ и затоа $abc=30$. Ако $a=-2$, тогаш $b=3$ и $c=5$, па $bc=15$ и затоа $abc=-30$.

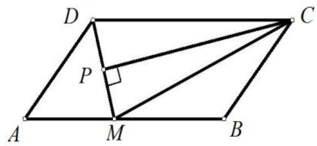
Значи единствени решенија на задачата се:

$$a=2, b=-3, c=-5, abc=30 \text{ и } a=-2, b=3, c=5, abc=-30.$$

Задача 3. Одреди три последователни природни броеви чиј производ е 24 пати поголем од најголемиот заеднички делител на броевите 455 и 1001.

Решение. Броевите 455 и 1001 разложени на множители се $455=5\cdot 7\cdot 13$ и $1001=7\cdot 11\cdot 13$. Најголемиот заеднички делител на 455 и 1001 е $7\cdot 13=91$. Од условот на задачата, производот на три последователни броеви е еднаков на $91\cdot 24=2184$. Бидејќи, $2184=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 7\cdot 13$, бараните три последователни броеви се $12,13,14$.

Задача 4. Даден е паралелограм $ABCD$ и точка M на страната AB таква што $\measuredangle AMD=\measuredangle CMD$. Докажи, дека ако точката P е средина на отсечката MD, тогаш $CP\perp DM$.



Решение. Од условот на задачата имаме $\measuredangle AMD=\measuredangle CMD$. Понатаму, $\measuredangle AMD=\measuredangle CDM$ како агли на трансферзала, па затоа $\measuredangle CDM =\measuredangle CMD$, што значи дека $\triangle CDM$ е рамнокрак и притоа важи $\overline{CM}=\overline{CD}$. Но, точката P е средина на отсечката MD, па затоа CP е симетрала на основата MD, од што следува дека $CP\perp DM$.

Задача 5. Определи ги сите природни броеви n такви што броевите $3n-4$, $4n-5$ и $5n-3$ се прости броеви.

Решение. Збирот на броевите $3n-4$, $4n-5$ и $5n-3$ е парен број, па мора еден од нив да е парен број. Бројот $4n-5$ не може да биде парен, бидејќи $4n$ е парен, а 5 е непарен. Значи, парни може да бидат само броевите $3n-4$ и $5n-3$. Бидејќи 2 е единствениот парен прост број, може да биде $3n-4=2$ или $5n-3=2$. Оттука добиваме дека $n=2$ или $n=1$. Притоа не е можно $n=1$. За $n=2$ ги добиваме простите броеви $3n-4=2$, $4n-5=3$ и $5n-3=7$. Значи, $n=2$ е бараниот природен број.

VIII одделение

Задача 1. Зоран, Горан и Ружа треба да поделат 2000 денари така што деловите на Зоран и Горан се однесуваат како $2:3$, а деловите на Горан и Ружа се однесуваат како $9:5$. По колку денари ќе добие секој од нив?

Решение. Ако Зоран добие $6x$ денари, тогаш Горан ќе добие $9x$ денари, а Ружа $5x$ денари. Заедно имаат $20x$ денари. Следува дека $20x=2000$, од каде $x=100$ денари. Значи, Зоран, Горан и Ружа треба да добијат 600, 900 и 500 денари, соодветно.

Задача 2. Најди ги сите парови цели броеви (a,b) за кои важи $a=\frac{4b-5}{b-2}$
.

Решение. Дадениот израз може да се трансформира на следниов начин:

$$a=\frac{4b-5}{b-2}=\frac{4(b-2)+8-5}{b-2}=\frac{4(b-2)}{b-2}+\frac{3}{b-2}=4+\frac{3}{b-2}.$$

Бројот a ќе биде цел број ако и само ако $\frac{3}{b-2}$ е цел број, односно ако и само ако $b-2$ е делител на 3, т.е. ако и само ако $b-2\in\{1,-1,3,-3\}$.

Според тоа, постојат четири можности и тоа:

- За $b-2=1$ добиваме $b=3, a=4+3=7$,
- За $b-2=-1$ добиваме $b=1, a=4-3=1$,
- За $b-2=3$ добиаме $b=5, a=4+1=5$ и
- За $b-2=-3$ добиваме $b=-1, a=4-1=3$.

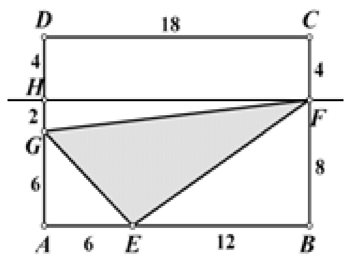
Бараните парови се: (7,3), (1,1), (5,5) и (3,-1).

Задача 3. Во правоаголник $ABCD$, со периметар $60cm$, важи $\overline{BC}=\frac{2}{3}\overline{AB}$. На страната AB дадена е точка E така што $\overline{AE}=\frac{1}{3}\overline{AB}$, а на страната BC дадена е точка F така што $\overline{BF}=\frac{2}{3}\overline{BC}$. Ако точката G е средина на отсечката AD, колку изнесува плоштината на триаголникот EFG?

Решение. Нека $\overline{AB}=a$ и $\overline{BC}=b$. Од условите на задачата следува $2a+2b=60$ и $b=\frac{2}{3}a$ односно $2a+2\cdot\frac{2}{3}a=60$. Значи,

$$\frac{10}{3}a=60, \text{ т.е. } a=18cm, b=12cm.$$

Сега $\overline{AE}=6cm, \overline{EB}=12cm,$



$$\overline{BF}=8cm, \overline{FC}=4cm \text{ и } \overline{AG}=\overline{GD}=6cm.$$

Имаме

$$P_{EFG}=P_{ABCD}-(P_{AEG}+P_{BFE}+P_{CDGF}).$$

Притоа важи,

$$P_{ABCD}=18\cdot 12=216cm^2, P_{AEG}=\frac{6\cdot 6}{2}=18cm^2, P_{BFE}=\frac{12\cdot 8}{2}=48cm^2,$$

а плоштината на четириаголникот $CDGF$ ќе ја пресметаме така што низ точката F ќе повлечеме права паралелна на страната CD. Добиваме

$$P_{CDGF}=P_{CDHF}+P_{HGF}=18\cdot 4+\frac{18\cdot 2}{2}=90cm^2.$$

Конечно, $P_{EFG}=216-(18+48+90)=216-156=60cm^2$.

Задача 4. Даден е $\triangle ABC$ со

$$\measuredangle BAC=40^\circ, \measuredangle ABC=20^\circ \text{ и } \overline{AB}-\overline{BC}=5cm.$$

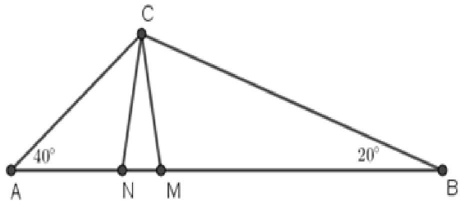
Ако симетралата на $\measuredangle ACB$ ја сече AB во точка M, да се пресмета должината на CM.

Решение. Нека $N\in AB$ така што $\overline{BC}=\overline{BN}$. Тогаш $\triangle BCN$ е рамнокрак па $\measuredangle BNC=\frac{180^\circ-20^\circ}{2}=80^\circ$. Од CM е симетрала на $\measuredangle ACB=120^\circ$ следува $\measuredangle MCB=60^\circ$, т.е.

$$\measuredangle BMC=180^\circ-20^\circ-60^\circ=100^\circ$$

од каде

$$\measuredangle NMC=180^\circ-100^\circ=80^\circ.$$



Значи, $\triangle NCM$ е рамнокрак, па затоа $\measuredangle NCM=180^\circ-80^\circ-80^\circ=20^\circ$. Понатаму, од

$$\measuredangle ACN=\measuredangle ACM-\measuredangle NCM=60^\circ-20^\circ=40^\circ$$

следува дека $\triangle ANC$ е рамнокрак, т.е. $\overline{AN}=\overline{NC}$. Тогаш

$$\overline{CM}=\overline{NC}=\overline{AN}=5cm.$$

Задача 5. Две свеќи имаат должини кои се разликуваат за 32 *cm*. Ако се запали подолгата во 15 часот, а пократката во 19 часот, тогаш во 21 часот ќе имаат иста должина. Подолгата целосно ќе изгори во 22 часот, а пократката на полноќ. Свеќите горат со константна брзина. Колкав е збирот на почетните должини на свеќите?

Решение. Бидејќи должините на свеќите во 21 часот се еднакви, подолгата наполно изгорува во 22 часот, а пократката на полноќ, следува дека на подолгата и треба 1 час, а на пократката 3 часа за да изгори еднаква должина. Затоа, подолгата свеќа гори 3 пати побрзо од пократката. Нека од пократката свеќа изгоруваат x cm на час, тогаш од подолгата ќе изгоруваат $3x$ cm на час. Од 15 до 21 часот, од подолгата свеќа се изгорени $6\cdot 3x$ cm, т.е $18x$ cm. Од 19 часот до 21 часот, од пократката свеќа ќе изгорат $2\cdot x$ cm. Во 21 часот имаат еднаква должина, што значи дека $18x-2x=32$ и оттука $x=2$ cm. Тогаш, должината на подолгата свеќа е $7\cdot 3x=42$ cm, бидејќи за 7 часа целосно изгорува, а на пократката, која изгорува за 5 часа е $5x=10$ cm.

IX одделение

Задача 1. Определи ги сите парови прости броеви чија разлика на квадрати е еднаква на 120.

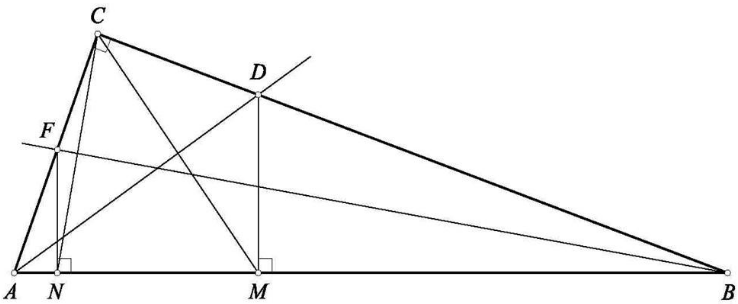
Решение. Нека $(x,y), x>y$ е бараниот пар прости броеви. Од условот на задачата следува $x^2-y^2=120$, т.е. $(x-y)(x+y)=120$. Очигледно $x-y+x+y=2x$ е парен број, па затоа двата множители мора да бидат со иста парност, а како производ на два непарни броеви е непарен број заклучуваме дека двата множители мора да бидат парни. Оттука следува дека се можни следниве случаи:

$$\begin{cases} x+y=60 \\ x-y=2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+y=30 \\ x-y=4 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+y=20 \\ x-y=6 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x+y=12 \\ x-y=10 \end{cases}.$$

Решенијата на првите три системи се и бараните подредени парови прости броеви (x,y), т.е. (31,29), (17,13) и (13,7), а додека последниот систем не дава решение, бидејќи се добива $x=11$ и $y=1$, а 1 не е прост број.

Задача 2. Даден е правоаголен триаголник ABC, со прав агол во темето C и агол во темето B еднаков на 20°. Симетралата на $\measuredangle BAC$ ја сече катетата BC во точка D, а симетралата на $\measuredangle ABC$ ја сече катетата AC во точка F. Од точките D и F повлечени се нормали на хипотенузата и тие хипотенузата ја сечат во точките M и N. Пресметај го $\measuredangle MCN$.

Решение. Триаголникот FCN е рамнокрак, бидејќи од својството на симетралата BF имаме $\overline{CF}=\overline{FN}$. Триаголникот CDM е рамнокрак, бидејќи од својството на симетралата AD имаме $\overline{CD}=\overline{DM}$. Затоа важи



$\measuredangle FCN=\measuredangle CNF$ и $\measuredangle DCM=\measuredangle DMC$.

Имаме, $\measuredangle A=90^\circ-20^\circ=70^\circ$, па затоа $\measuredangle AFN=20^\circ$. Аналогно наоѓаме $\measuredangle BDM=70^\circ$. Затоа $\measuredangle FCN=\measuredangle CNF=\frac{\measuredangle AFN}{2}=\frac{20^\circ}{2}=10^\circ$. Аналогно наоѓаме $\measuredangle DCM=\measuredangle DMC=\frac{70^\circ}{2}=35^\circ$. Конечно, за бараниот агол наоѓаме

$$\measuredangle MCN=90^\circ-(10^\circ+35^\circ)=90^\circ-45^\circ=45^\circ.$$

Задача 3. Низа од природни броеви започнува со бројот 6. Секој нареден член во низата се добива по следното правило: ако членот a е парен број, тогаш нареден член е $\frac{1}{2}a$, а ако членот a е непарен број, тогаш нареден член во низата е $3a+1$. Кој број е 2018-ти член? Образложи го својот одговор!

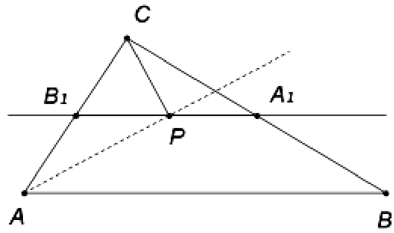
Решение. Да ги запишеме првите членови од низата. Имаме:

$$6\ 3\ 10\ 5\ 16\ 8\ 4\ 2\ 1\ 4\ 2\ 1\ \ldots$$

Значи, по 6-тиот член, циклично се повторуваат $4\ 2\ 1$. Воочуваме дека на седмо место, десетто, тринаесто, итн. ќе биде 4, односно на место чиј реден број при делење со 3 дава остаток 1 ќе биде 4; на осмо место, единаесто, четиринаесто, итн. ќе биде 2, односно на место чиј реден број при делење со 3 дава остаток 2 ќе биде 2; а на деветто место, дванаесто, петнаесто, итн. ќе биде 1, односно на место чиј реден број е делив со 3 ќе биде 1. Бидејќи $2018=3\cdot 672+2$, 2018-ти член во низата е 2.

Задача 4. Даден произволен триаголник ABC. Нека P е пресечната точка на симетралата на аголот $\measuredangle BAC$ и правата која ги преполовува отсечките $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$. Докажи дека $\angle APC$ е прав агол.

Решение. Нека $\measuredangle BAC=\alpha$ и B_1, A_1 се средините на отсечките $\overline{AC}, \overline{BC}$, соодветно. Бидејќи отсечката $\overline{A_1B_1}$ е средна линија на триаголникот ABC, следува дека $B_1P \| AB$. Тогаш $\measuredangle BAP=\measuredangle APB_1=\frac{\alpha}{2}$ (агли со паралелни краци) и $\measuredangle BAP=\measuredangle B_1AP=\frac{\alpha}{2}$ (правата AP е симетрала на α). Од тука следува дека $\measuredangle APB_1=\measuredangle B_1AP=\frac{\alpha}{2}$, односно дека триаголникот APB_1 е рамнокрак. Според тоа, $\overline{AB_1}=\overline{B_1P}=\overline{B_1C}$, односно $\overline{AC}$ е дијаметар на кружница опишана околу триаголникот APC. Од Талесовата теорема следува дека $\measuredangle APC=90^\circ$.



Задача 5. Збирот на два природни броја е 2018. Ако се прецрта цифрата на единиците на едниот, ќе се добие другиот број. Најди ги сите такви броеви.

Решение. Нека броевите се x и y и нека $x>y$. Тогаш $x=10y+k$, каде k е прецртаната цифра. Сега имаме $x+y=10y+k+y=11y+k$, па $11y+k=2018$. Значи, k е остатокот од делењето на 2018 со 11, т.е. $k=5$. Според тоа $11y+5=2018$, па $y=183$. Следува $x=1835$.