Републички натпревар 1991

I година

1. На еден шаховски турнир учествувале 5 играчи, кои одиграле по една партија секој со секого, како што е вообичаено. За победа е доделуван по 1 поен, за реми $\frac{1}{2}$ поени и за пораз 0 поени. По завршувањето на турнирот:

- немало играчи со ист број на поени;
- победникот не ремизирал ниедна партија;
- второпласираниот играч не изгубил ниту една партија;
- играчот кој освоил четврто место не победил ни во една партија.

Да се одредат резултатите во сите партии.

Решение. Бидејќи победникот не ремизирал ниту една партија, а второпласираниот не загубил од никого, следува дека победникот загубил од второпласираниот. Бидејќи второпласираниот нема изгубено ниедна партија, може да има најмалку $2,5$ поени. Од овде следува дека првиот ги победил останатите натпреварувачи. Второпласираниот играч, заради првиот и третиот услов од задачата, ремизирал со третиот, четвртиот и петтиот играч. Првиот и вториот освоиле вкупно $5,5$ поени. Бидејќи се одиграни 10 партии, останатите играчи освоиле заедно $4,5$ поени. Користејќи дека немало играчи со ист број на поени, добиваме дека единствена можност е третиот да има 2 поени, четвртиот да има $1,5$ поен а петтиот 1 поен. Заклучуваме дека третиот ремизирал со четвртиот и го победил петтиот, а четвртиот и петтиот играч ремизирале заради последниот услов од задачата. На тој начин ја добиваме следната табела.

	1	2	3	4	5
1		0	1	1	1
2	1		1/2	1/2	1/2
3	0	1/2		1/2	1
4	0	1/2	1/2		1/2
5	0	1/2	0	1/2	

2. Да се докаже дека бројот $1+3+3^2+3^3+...+3^{1991}$ е делив со 41.

Решение. Прво да забележиме дека

$$1+3+3^2+...+3^{1991}=(1+3+3^2+...+3^7)(1+3^8+3^{10}+...+3^{1984})\,. \qquad (1)$$

Потоа, имаме

$1\equiv 1 \pmod{41}$, $\quad 3\equiv 3 \pmod{41}$ $\quad 3^2\equiv 9 \pmod{41}$ $\quad 3^3\equiv 27 \pmod{41}$

$3^4\equiv -1 \pmod{41}$, $\quad 3^5\equiv -3 \pmod{41}$, $\quad 3^6\equiv -9 \pmod{41}$ $\quad 3^7\equiv -27 \pmod{41}$.

Значи,

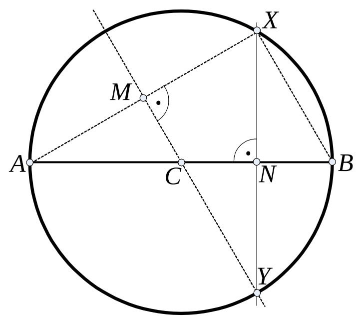
$$1+3+3^2+3^3+3^4+3^5+3^6+3^7\equiv 0 \pmod{41},$$

па, според (1), бројот $1+3+3^2+3^3+...+3^{1991}$ е делив со 41

3. Да се најде природен број n, така што $\frac{n(n+1)}{2}$ да е трицифрен број со исти цифри.

Решение. Од $\frac{n^2}{2} < \frac{n(n+1)}{2} \leq 999$, следува дека $n < \sqrt{2 \cdot 999} \approx 44,7$. Секој трицифрен број со исти цифри е делив со $111 = 3 \cdot 37$. Затоа, $37 \mid n$ или $37 \mid (n+1)$. Но, бидејќи $n \leq 44$, следува дека $n = 37$ или $n = 36$. Со непосредна проверка се добива дека само $n = 36$ го исполнува условот од задачата.

4. Нека k е кружница со дијаметар AB, и нека C е произволна точка од отсечката AB. Да се најдат две точки X и Y од кружницата k кои се симетрични во однос на AB и такви што правите AX и CY се заемно нормални.



Решение. Нека X е бараната точка и нека

$$AX \cap CY = M, \ AB \cap XY = N.$$

Тогаш

$$\measuredangle AMY = 90^\circ \text{ и } \measuredangle AXB = 90^\circ,$$

па $BX \parallel CY$. Освен тоа, $\overline{NX} = \overline{NY}$ и $BC \perp XY$, па N е средина на BC.

II година

1. Ако $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ се позитивни реални броеви такви што

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = ... = \frac{a_n}{b_n}.$$

Да се докаже дека

$$\sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2} + ... + \sqrt{a_n b_n} = \sqrt{a_1 + a_2 + ... + a_n}\sqrt{b_1 + b_2 + ... + b_n}.$$

Решение. Нека $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = ... = \frac{a_n}{b_n} = k$; тогаш $a_1 = kb_1$, $a_2 = kb_2, \ldots, a_n = kb_n$, па

$$\begin{aligned}
\sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2} + ... + \sqrt{a_n b_n} &= b_1\sqrt{k} + b_2\sqrt{k} + b_3\sqrt{k} + ... + b_n\sqrt{k} \\
&= (b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n)\sqrt{k} \\
&= \sqrt{b_1 + b_2 + ... + b_n}\sqrt{b_1 + b_2 + ... + b_n}\sqrt{k} \\
&= \sqrt{a_1 + a_2 + ... + a_n}\sqrt{b_1 + b_2 + ... + b_n}.
\end{aligned}$$

2. Множеството $\{1, 2, 3, ..., 20\}$ е поделено на две дисјунктни подмнбожества $A = \{a_1, a_2, ..., a_{10}\}$ и $B = \{b_1, b_2, ..., b_{10}\}$, така што

$$a_1 > a_2 > ... > a_{10} \quad \text{и} \quad b_1 < b_2 < ... < b_{10}.$$

Да се докаже дека

$$|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+|a_3-b_3|+...+|a_{10}-b_{10}|=100\,.$$

Решение. Јасно е дека точнои еден од броевите a_1 и b_{20} е 20. Без ограничување на општоста мможеме да земеме дека $a_1=20$. Нека, на пример, $a_{i+1}-a_i\geq 2$ за некој $i\in\{1,2,...,9\}$ и нека j е такво што $b_j=a_i+1$. Множествата $A'=\{a_1^{'},a_2^{'},...,a_{10}^{'}\}$ и $B'=\{b_1^{'},b_2^{'},...,b_{10}^{'}\}$ каде што $a_k^{'}=a_k$ ($k\neq i$), $a_i^{'}=a_i+1$, $b_k^{'}=b_k$ ($k\neq j$), $b_j^{'}=b_j-1$ се дисјунктни подмножества од $\{1,2,3,...,20\}$ и важи

$$|a_1^{'}-b_1^{'}|+|a_2^{'}-b_2^{'}|+...+|a_{10}^{'}-b_{10}^{'}|=|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+...+|a_{10}-b_{10}|\,.$$

По конечен број вакви чекори доажаме до случајот $a_1=20, a_2=19,..., a_{10}=11$, $b_1=1, b_2=2,..., b_{10}=10$ при шро важи

$$|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+|a_3-b_3|+...+|a_{10}-b_{10}|=19+17+15+...+1=100\,.$$

3. Да се докаже дека за било кои ненегативни броеви a и b важи

$$\tfrac{1}{2}(a+b)^2+\tfrac{1}{4}(a+b)\geq a\sqrt{b}+b\sqrt{a}\,.$$

Решение. Од $(\sqrt{a}-\frac{1}{2})^2+(\sqrt{b}-\frac{1}{2})^2\geq 0$ добиваме дека

$$a+b+\tfrac{1}{2}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}\,.$$

Користејќи го ова неравенство, како и неравенството $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$, добиваме дека

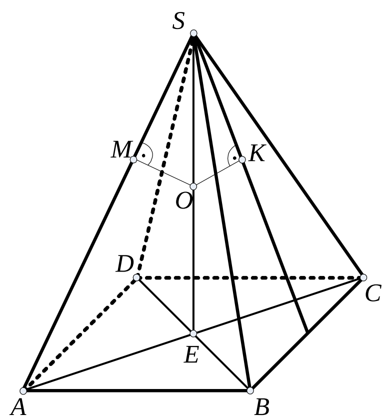
$$\tfrac{1}{2}(a+b)^2+\tfrac{1}{4}(a+b)=\tfrac{a+b}{2}(a+b+\tfrac{1}{2})\geq\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a\sqrt{b}+b\sqrt{a}\,.$$

4. Од средината O на висината SE на права правилна четиристрана пирамида со врв S и подножје E на висината спуштени се нормали OM на бочниот раб и OK на бочниот ѕид на пирамидата. Ако должините на тие нормали се $\overline{OM}=p$ и $\overline{OK}=q$, да се пресмета волуменот на пирамидата.

Решение. Од сличноста на триаголниците MOS и EAS добиваме дека $\frac{H}{2}:p=s:\frac{a\sqrt{2}}{2}$, каде што s е должината на бочниот раб, а a е должината на основниот раб. Од триаголниците, пак, SOK и SFE добиваме $\frac{H}{2}:s=h:\frac{a}{2}$, каде H и h се висината, апотемата и бочниот раб на пирамидата. Заменувајќи ги

$$s^2=H^2+\tfrac{a^2}{2}\text{ и }h^2=H^2+\tfrac{a^2}{4}$$

во горните пропорции, добиваме



$$\frac{aH}{4}\sqrt{2}=p\sqrt{H^2+\frac{a^2}{2}} \quad \text{и} \quad \frac{aH}{4}=q\sqrt{H^2+\frac{a^2}{4}}.$$

Од системот добиваме

$$a^2=\frac{8p^2q^2}{p^2-q^2} \quad \text{и} \quad H^2=\frac{4p^2q^2}{2q^2-p^2},$$

па

$$V=\frac{1}{3}a^2H=\frac{16}{3}\frac{p^3q^3}{(p^2-q^2)\sqrt{2q^2-p^2}}.$$

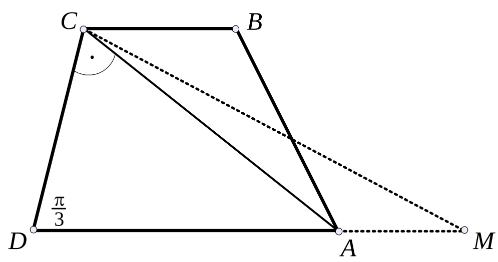
III година

1. Нека $ABCD$ е рамнокрак трапез ($AD \| BC$) со агол $\frac{\pi}{3}$ на поголемата основа AD и дијагонала $\overline{AC}=\sqrt{3}$. Една точка M е на растојание 1 од A и на растојание 3 од D. Да се најде $\overline{MC}$.

Решение. Од

$$\overline{AD}\geq\overline{MD}-\overline{AM}=3-1=2 \text{ и}$$

$$\overline{AD}\sin\frac{\pi}{3}\leq\sqrt{3}$$



следува дека $\overline{AD}=2$ и $\measuredangle ACD=\frac{\pi}{2}$. Значи, точката M лежи на правата AD и е на растојание 1 и 3 од A и D соодветно. Од правоаголниот триаголник ACD следува дека $\overline{CD}=1$. Од овде, пак, следува дека $\overline{BC}=1$ и

$$\overline{MC}=\sqrt{(1+2-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\sqrt{7}.$$

2. Нека $a,b,c\in\mathbb{R}$ и нека за секој $x\in[-1,1]$ важи

$$|ax^2+bx+c|\leq 1.$$

Да се докаже дека за секој $x\in[-1,1]$ важи

$$|cx^2+bx+a|\leq 1.$$

Решение. Нека $f(x)=ax^2+bx+c$ и $g(x)=cx^2+bx+a$. Очигледно е дека $|c|\leq 1$, $|g(1)|=|f(1)|\leq 1$ и $|f(-1)|=|g(-1)|\leq 1$. Темето на параболата $g(x)$ е во точката $(p,g(p))$ каде што $p=-\frac{b}{2c}$. Ако $|p|>1$, функцијата $g(x)$ е монотона на интервалот $[-1,1]$ и задачата е решена. Затоа, нека $|p|\leq 1$. Претходно да воочиме дека за произволни x и y важи

$$g(x)-g(y)=c(x^2-y^2)+b(x-y)=(x-y)[c(x+y)+b]=(x-y)\cdot 2c\cdot(\frac{x+y}{2}-p).$$

Можни се два случаја:

1. $0\le p<1$. Тогаш

$$|g(1)-g(p)|=|(1-p)\cdot 2c\cdot\frac{1-p}{2}|\le|c|\le 1,$$

па, затоа, $|g(p)|\le 2$ и $|g(x)|\le 2$ за секој $x\in[-1,1]$.

2. $-1<p<0$. Тогаш

$$|g(p)-g(-1)|=|(p+1)\cdot 2c\cdot\frac{-1-p}{2}|\le|c|\le 1,$$

па, затоа, $|g(p)|\le 2$ и $|g(x)|\le 2$ за секој $x\in[-1,1]$.

Направи цртеж!

3. Користејќи го фактот дека Питагоровите тројки го имаат обликот

$$(xy,\frac{x^2-y^2}{2},\frac{x^2+y^2}{2}),\ x>y,$$

каде што x и y се природни броеви со иста парност, да се одреди кој правоаголен триаголник со целобројни страни и катета 1000 има:

а) најголем периметар;

б) најмала плоштина.

Решение. Од $1000=pq$ добиваме дека $p=2^a5^b$ и $q=2^{3-a}5^{3-b}$, каде што $a\in\{1,2\}$ и $b\in\{0,1,2,3\}$. Значи, страните на триаголникот се

$$x=1000,\ y=2^{2a-1}5^{2b}-2^{5-2a}5^{6-2b},\ z=2^{2a-1}5^{2b}+2^{5-2a}5^{6-2b}$$

а) Периметарот $L=x+y+z=1000+2^{2a}5^{2b}$ ќе прима најголем авредност за најголемите вредности дозволени вредности на a и b, т.е. за $a=2$ и $b=3$. Следствено,

$$x=1000,\ y=124998,\ \ z=125002 \text{ и } L=251000.$$

б) Плоштината на триаголникот ќе биде најмала за оние вредности на a и b за кои $y=\frac{1}{2}(p^2-q^2)$ ќе прими најмала позитивна вредност. Со непосредна проверка се добива дека тоа се постигнува за $a=1$ и $b=2$. Следствено

$$x=1000,\ y=1050,\ z=1450 \text{ и } L=525000.$$

4. Да се реши системот

$$\begin{cases}\log_y x-2\log_x y=1\\ x-y=2\end{cases}$$

Решение. Нека $t=\log_y x$; тогаш првата равенка гласи $t-\frac{2}{t}=1$, од каде што добиваме $t_1=2$ и $t_2=-1$.

Од $\log_y x=2$, добиваме $x=y^2$. Од втората равенка, $x-y=2$ и $x=y^2$ следува дека $y=2$, зошто $y=-1$ не се зема како решение. Значи, едно решение е $x=4$ и $y=2$.

Од $\log_y x=-1$ добиваме дека $x=\frac{1}{y}$. Од ова и втората равенка следува дека $y=\sqrt{2}-1$ ($y>0$). Значи, второто решение е $x=\sqrt{2}+1$ и $y=\sqrt{2}-1$.

IV година

1. Ако $0<\alpha,\beta<\frac{\pi}{2}$ и $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)$, тогаш $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$. Докажи!

Решение.Бидејќи $\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$ добиваме дека $\sin\alpha,\sin\beta,\cos\alpha, \cos\beta>0$. Равенството $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)$ го запишуваме во следниот еквивалентен облик

$$(\sin\alpha-\cos\beta)\sin\alpha=(\cos\alpha-\cos\beta)\sin\beta.$$

Ако $\sin\alpha-\cos\beta>0$, тогаш и $\cos\alpha-\sin\beta>0$. Значи,

$$\sin\alpha>\cos\beta$$
$$\cos\alpha>\sin\beta.$$

Ако овие две равенства ги квадрираме и ги собереме добиваме $1>1$ што е противречност. Аналогно се исклучува и можноста да е $\sin\alpha-\cos\beta<0$. Затоа, единствена можност останува да е $\sin\alpha-\cos\beta=0$, а од ова следува дека $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$.

2. Иста како задача 2 од трета година.

3. На еден шаховски турнир на кој немало нерешени резултати, учествувале два ученика и неколку студенти. Играле секој со секого. Двајцата ученици освоиле заедно 8 поени, додека сите студенти освоиле по еднаков број на поени. Колку студенти учествувале на турнирот и колку поени освоиле. Да се најдат сите решенија.

Решение. Нека x е бројот на студенти што учествувале на турнирот и k е бројот на поени што секој од нив го освоил. Тогаш

$$\binom{x+2}{2}=kx+8, \text{ т.е. } x^2-(2k-3)x-14=0.$$

Бидејќи $x,k\in\mathbb{N}$, дисриминантата на горната равенка мора да е точен квадрат, т.е.

$$(2k-3)^2+56=n^2,$$

односно $(2k-3)^2-n^2=-56$. Ова може да се запише во следниот облик

$$(n-2k+3)(n+2k-3)=56=1\cdot2\cdot2\cdot2\cdot7.$$

Ги имаме следните можности:

1° $n-2k+3=1$ и $n+2k-3=56$

2° $n-2k+3=2$ и $n+2k-3=28$

3° $n-2k+3=4$ и $n+2k-3=14$

4° $n-2k+3=8$ и $n+2k-3=7$

5° $n-2k+3=56$ и $n+2k-3=1$

6° $n-2k+3=28$ и $n+2k-3=2$

7° $n-2k+3=14$ и $n+2k-3=4$

8° $n-2k+3=7$ и $n+2k-3=8$

Со директна проверка се гледа дека само системите под 2° и 3° даваат решенија кои одговараат на дадените услови.

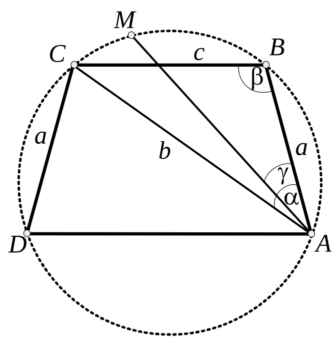
Во 2° се добива $n=15$, $k=8$ и $x=14$

Во 3° се добива $n=9$, $k=4$ и $x=7$.

4. Даден е рамнокрак трапез со основа AD така што $\overline{AB}=\overline{CD}=a$, $\overline{AC}=\overline{BD}=b$ и $\overline{BC}=c$. Нека M е произволна точка од лакот BC од опишаната кружница околу трапезот $ABCD$. Да се изрази $\frac{\overline{BM}+\overline{MC}}{\overline{AM}+\overline{MD}}$, преку a,b и c.

Решение. Нека R е радиусот на опишаната кружница околу трапезот $ABCD$; да означиме

$$\measuredangle BAC=\alpha,\quad \measuredangle ABC=\beta,\quad \measuredangle BAM=\gamma.$$



Од синусната теорема добиваме

$$\overline{BM}=2R\sin\gamma$$

$$\overline{MC}=2R\sin(\alpha-\gamma)$$

$$\overline{AM}=2R\sin(\gamma+\pi-(\alpha+\beta))=2R\sin(\alpha+\beta-\gamma)$$

$$\overline{MD}=2R\sin(\alpha-\gamma+\pi-\alpha-\beta)=2R\sin(\beta+\gamma).$$

Користејќи го тоа добиваме

$$\frac{\overline{BM}+\overline{MC}}{\overline{AM}+\overline{MD}}=\frac{\sin\gamma+\sin(\alpha-\gamma)}{\sin(\alpha+\beta-\gamma)+\sin(\beta+\gamma)}=\frac{2\sin\frac{\alpha+\gamma-\gamma}{2}\cos\frac{\gamma-\alpha+\gamma}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma-\beta-\gamma}{2}}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos(\gamma-\frac{\alpha}{2})}{2\sin(\beta+\frac{\alpha}{2})\cos(\gamma-\frac{\alpha}{2})}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin(\beta+\frac{\alpha}{2})\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)+\sin\beta}$$

$$=\frac{2R\sin\alpha}{2R\sin[\pi-(\alpha+\beta)]+2R\sin\beta}=\frac{c}{a+b}.$$