Др Зоран Каделбург (Београд)

АРХИМЕДОВ ПРОБЛЕМ О ГОВЕДИМА

Великистарогрчкиматематичар Архимед (287–212 п.н.е) волео је, између осталог, да поставља и решава проблеме у којима се појављују веома велики природни бројеви. Тако је у једном писму Ератостену (око 276–194 п.н.е) поставио задатак о којем ћемо говорити у овом чланку.

Задатак је постављен у стиховима и у веома слободном преводу почиње отприлике овако:

> На острву Сицилија бог Сунца је гајио говеда. Било је четири врсте говеда – бела, црна, шарена и смеђа – и у свакој врсти било је и крава и волова . . .

У даљем тексту се дају услови које су задовољавали бројеви крава, односно волова у свакој од тих врста. Ако се грчки стихови преведу на математичку прозу и са x, y, z, t означе редом бројеви белих, црних, шарених и смеђих волова, а са x', y', z', t' одговарајући бројеви крава, Архимедов задатак је био постављен на следећи начин.

АРХИМЕДОВ ПРОБЛЕМ. (а) *Одредити природне бројеве x, y, z, t, као и x', y', z', t' који задовољавају следећих седам услова*

$$x = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)y + t, \qquad y = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)z + t, \qquad z = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)x + t, \tag{1}$$

$$x' = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)(y + y'), \qquad z' = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)(t + t'), \qquad y' = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)(z + z'), \qquad t' = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)(x + x'). \tag{2}$$

(б) *Одредити оно решење претходног проблема код којег је $x + y$ квадратни, а $z + t$ троугаони број.*

(Објаснићемо нешто касније смисао услова (б).)

Приметимо најпре да су све једначине које су дате линеарне, тј. да нам је дат систем од седам линеарних једначина са осам непознатих. Као што ученици старијих разреда знају, систем од две једначине са две непознате (најчешће) има једно решење. Слично се може показати за систем од три једначине са три непознате и, уопште, за систем који има онолико линеарних једначина колико и непознатих. Међутим, ако је, као овде, број једначина мањи од броја непознатих, такав систем најчешће има бесконачно много решења. На пример, то важи за једну једначину са две непознате

$$2x - 3y = 1.$$

Наиме, за сваки реалан број x, ако изаберемо број y тако да је $y = \dfrac{2x-1}{3}$, пар (x, y) ће задовољавати дату једначину.

Ствари стоје мало другачије ако захтевамо да се одреде само целобројна решења (тј. таква решења (x, y) код којих су и x и y цели бројеви). Као што многи знају, такве једначине се зову диофантске, по имену још једног познатог старогрчког математичара Диофанта (III век н.е). Може се догодити да диофантска линеарна једначина са две непознате уопште нема решења. На пример, једначина

$$3x - 6y = 5$$

нема решења, јер какви год били цели бројеви x и y, лева страна једначине је број дељив са 3, а десна то није. Међутим, често такве једначине ипак имају решења и у том случају решења опет има бесконачно много. Рецимо, поменута једначина

$$2x - 3y = 1$$

има и бесконачно много целобројних решења (x, y), при чему се сва она могу представити у облику

$$x = 3z - 1, \qquad y = 2z - 1,$$

где је z произвољан цео број. О решавању оваквих једначина више пута је било речи на страницама Математичког листа.

Вратимо се сада Архимедовом проблему. Ако се из прва три услова тог проблема (дакле из три линеарне једначине означене са (1)) елиминишу неке две непознате (на сличан начин као што се то ради код решавања „обичног“ система од две једначине са две непознате), добиће се линеарна диофантска једначина са две непознате. (При том подразумевамо и да смо се ослободили разломака, тј. да су у добијеној једначини сви коефицијенти цели бројеви.) Добијена једначина ће имати бесконачно много решења, али сва она се могу изразити слично као што смо то урадили код једначине $2x - 3y = 1$. Добија се да бројеви x, y, z, t (подсећамо, то су бројеви волова разних боја) морају бити облика

$$x = 2226 \cdot k, \quad y = 1602 \cdot k, \quad z = 1580 \cdot k, \quad t = 891 \cdot k,$$

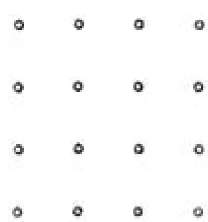
за неки природан број k. Ако се ови изрази уврсте у преостале четири једначине (означене са (2)) и постави услов да и x', y', z', t' (дакле, бројеви крава) морају бити цели бројеви, добија се да мора бити $k = 4657 \cdot l$ за неки природан број l. Тада је

$$x' = 7206360 \cdot l, \quad y' = 4893246 \cdot l, \quad z' = 3515820 \cdot l, \quad t' = 5439213 \cdot l.$$

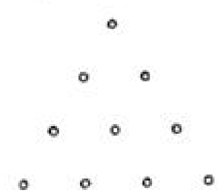
Као што видимо, бројеви који се појављују заиста постају све већи и већи.

А још смо далеко од коначног решења. Јер, предстоји нам решавање задатка под (б), а он је главни део проблема. Објаснимо најпре услове који су ту постављени.

Стари Грци су волели да за одређене врсте бројева користе геометријске термине. Тако су број облика n^2 називали квадратним бројем, очигледно због тога што се n^2 тачака може тако распоредити да образују један квадрат (Сл. 1). Ако се, пак, неких p тачака може распоредити тако да образује једнакостранични троугао (Сл. 2), број p је називан троугаоним.



Сл. 1



Сл. 2

На пример, троугаони су бројеви

$$T_1 = 1,$$
$$T_2 = 1 + 2 = 3,$$
$$T_3 = 1 + 2 + 3 = 6,$$
$$T_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10,$$
$$T_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15.$$

Уопште, сваки троугаони број се може приказати у облику

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n.$$

Поступком за који верујемо да је ученицима познат из анегдоте о деветогодишњем Гаусу, претходни збир се може изразити као

$$T_n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

На који начин се може одредити да ли је дати природан број троугаони или није? Докажимо да важи тврђење:

Природан број p је троугаони ако и само ако је $8p+1$ квадратни број.

Претпоставимо најпре да је дати број p троугаони, тј. да је за неко n,

$$p = T_n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Тада је

$$8p + 1 = 8 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2,$$

дакле $8p+1$ је квадратни број. Обрнуто, ако је $8p+1$ квадратни број, он свакако мора бити квадрат неког непарног броја, тј. за неко n је

$$8p + 1 = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1.$$

Одатле је

$$p = \frac{4n^2 + 4n}{8} = \frac{n(n+1)}{2} = T_n,$$

тј. p је троугаони број. Како, дакле, можемо да запишемо Архимедов задатак под (б) ? Треба одредити природан број l (што је могуће мањи) тако да број

$$x + y = 4657 \cdot 3828 \cdot l \tag{3}$$

буде потпун квадрат, а да број

$$z + t = 4657 \cdot 2471 \cdot l \tag{4}$$

буде троугаони. Како је $4657 \cdot 3828 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657$ (број 4657 је прост), услов (3) ће бити испуњен ако је $l = am^2$, где је $a = 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657$, а m је цео број. Да би број $z + t$ био троугаони, тј. да би $8(z + t) + 1$ био потпун квадрат (нпрједнак n^2), мора бити, на основу (4),

$$n^2 = 8(z + t) + 1 = 8 \cdot 4657 \cdot 2471 \cdot am^2 + 1,$$

па тако за налажење бројева m и n добијамо нову диофантску једначину

$$n^2 = dm^2 + 1,$$

где је

$$d = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 353 \cdot (2 \cdot 4657)^2 = 410\,286\,423\,278\,424.$$

Овај пут, међутим, једначина више није линеарна и није уопште једноставно наћи њена решења, чак није унапред јасно ни да ли решење постоји. Ради се о врсти једначине која је у XVIII веку названа *Пеловом једначином* и чије решавање је одиграло важну улогу у развоју теорије бројева.

Тек је француски математичар Лагранж (1736–1813) доказао да оваква једначина увек има решења и навео поступак како се решења налазе. Како се то догодило приближно у исто време када је и пронађен папирус са текстом Архимедовог проблема о говедима, многи математичари су прионули на посао да нађу његово решење. Међутим, сви су врло брзо „поломили зубе“ – једноставно, бројеви су били превелики.

После више неуспешних покушаја тек је 1880. године доказано да најмање решење (тачније, најмањи укупни број говеда), представљено у декадном запису има 206 545 цифара! Тачан запис овог најмањег решења је нађен тек у ери рачунара. То решење је објављено 1980. године и у оригиналу заузима 47 страница компјутерског листинга. Наводимо неке од цифара:

$$77602714\ldots 237983357\ldots 55081800,$$

где свака од шест тачака замењује 34420 изостављених цифара.

Скоро је сигурно да ни сам Архимед није умео да реши свој проблем.

И на крају, један шаљиви коментар. Кажу да су се неки математичари XIX века, када је постало јасно о коликим се бројевима ради, „забринули“ – јесте да је Сицилија повеће острво, али да ли је толики број говеда могао тамо да стане? Проналазач Архимедовог папируса, Лесинг, на то је одговорио: „Она су припадала богу Сунца, зар не? Ако је он неки бог, валјда се некако потрудио да их тамо смести“.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија