Савршени бројеви и Мерсенови бројеви

мр Марија Станић, **Крагујевац**

Већина ученика се већ у основној школи среће са појмом *савршеног броја*, ако не у математици, онда у информатици. Готово да нема ниједне збирке из информатике у којој се не налази задатак да се напише програм који налази све савршене бројеве мање од неког унапред задатог броја. Ако сте и ви радили такав задатак онда сте вероватно приметили да таквих бројева нема „много". Да ли сте се запитали колико укупно има савршених бројева и како се они могу описати? Пре него што покушамо да одговоримо на ова питања да се подсетимо најпре шта су то савршени бројеви.

Дефиниција 1. *Природан број n је* ***савршен број*** *ако је једнак збиру свих својих позитивних делилаца (искључујући сам број n).*

Пример. Прва три савршена броја су $6 = 1 + 2 + 3$, $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$, $496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$ и то су једини савршени бројеви мањи од 1000. Четврти савршен број је 8128. Приметимо да важи:

$$(*) \qquad 6 = 2 \cdot 3, \quad 28 = 4 \cdot 7, \quad 496 = 16 \cdot 31, \quad 8128 = 64 \cdot 127,$$

тј. уочени савршени бројеви представљени су као производи степена броја 2 и простих бројева 3, 7, 31 и 127 редом. Приметимо још, да када тим простим бројевима додамо 1 добијамо бројеве 4, 8, 32 и 128, који су сви степени броја 2.

У дефиницији савршених бројева помиње се збир позитивних делилаца, па ћемо се мало позабавити том функцијом.

Дефиниција 2. *Функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ је мултипликативна ако:*
1° за неко $n_0 \in \mathbb{N}$ је $f(n_0) \neq 0$;
2° ако су бројеви m и n узајамно прости, онда је $f(mn) = f(m)f(n)$.

Теорема 1. *Нека је $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ канонска факторизација броја n. Ако збир свих позитивних делилаца броја n означимо са $\sigma(n)$, тада је*

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}.$$

Доказ. *I начин:* Доказаћемо теорему индукцијом по броју (различитих) простих делилаца броја n.

Ако је $n = p^\alpha$, за неки прост број p и неко $\alpha \in \mathbb{N}$, тада су $1, p, p^2, \ldots, p^\alpha$ сви позитивни делиоци броја n, и важи:

$$1 + p + p^2 + \cdots + p^\alpha = \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1}.$$

Претпоставимо да једнакост важи за све природне бројеве који имају k (различитих) простих делилаца.

Нека је $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} \cdot p_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$. Ако је $n_0 = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, тада имамо да су:

$$\begin{array}{llll} d_1, & d_1 \cdot p_{k+1}, & \ldots, & d_1 \cdot p_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \\ d_2, & d_2 \cdot p_{k+1}, & \ldots, & d_2 \cdot p_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \\ \vdots & & & \end{array}$$

сви делиоци броја n, где су $d_1, d_2, \ldots$ сви делиоци броја n_0, па је

$$\begin{aligned} \sigma(n) = \sum_{d|n} d &= \sum_{d|n_0} \left(d + d \cdot p_{k+1} + \cdots + d \cdot p_{k+1}^{\alpha_{k+1}}\right) \\ &= \left(1 + p_{k+1} + \cdots + p_{k+1}^{\alpha_{k+1}}\right) \sum_{d|n_0} d \\ &= \frac{p_{k+1}^{\alpha_{k+1}+1} - 1}{p_{k+1} - 1} \cdot \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}. \end{aligned}$$

II начин: Збир свих делилаца броја n је

$$\begin{aligned} \sigma(n) &= \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} \cdots \sum_{\beta_k=0}^{\alpha_k} p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k} \\ &= \prod_{i=1}^{k} \left(1 + p_i + p_i^2 + \cdots + p_i^{\alpha_i}\right) \\ &= \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}. \end{aligned}$$

Из теореме 1 непосредно следи следећа теорема.

Теорема 2. *Функција σ је мултипликативна.*

Сада када смо увели функцију σ лако се види да је природан број n савршен ако важи $\sigma(n) = 2n$.

Сада се природно намеће питање да ли сви савршени бројеви имају факторизацију типа $(*)$. Да би дали одговор на то питање упознаћемо се са још једном класом бројева, са тзв. ***Мерсеновим*** * ***бројевима***. Мерсенови бројеви су бројеви облика $2^n - 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 3. *Ако је n природан број и $2^n - 1$ прост број, онда је и n прост број.*

Доказ. Доказаћемо еквивалентно тврђење, тј. да је $2^n - 1$ сложен број ако је n сложен. Нека је $n = rs$, $r > 1$, $s > 1$. Тада је

$$\begin{aligned} 2^n - 1 &= 2^{rs} - 1 = (2^r)^s - 1 \\ &= (2^r - 1)\left((2^r)^{s-1} + (2^r)^{s-2} + \cdots + 1\right), \end{aligned}$$

* Marin Mersenne (1588–1648), француски математичар, физичар, филозоф и теолог

тј. број $2^n - 1$ је сложен.

Обрат теореме 3 не важи што показује следећи пример

$$2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89.$$

Прости бројеви облика $M_p = 2^p - 1$ називају се ***Мерсенови прости бројеви***. Мерсен је тврдио да су $2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127$ и 257 једини прости бројеви, не већи од 257, за које је број $2^p - 1$ прост. Међутим, испоставило се да ту има неколико грешака, које су откривене много година после Мерсенове смрти. Наиме, бројеви M_{61}, M_{89} и M_{107} су прости, а нема их на Мерсеновој листи, док су бројеви M_{67} и M_{257} са Мерсенове листе сложени.

Иначе, Мерсен је ове бројеве изучавао у вези са савршеним бројевима.

Теорема 4. *Ако је $2^p - 1$ прост број онда је $2^{p-1}(2^p - 1)$ савршен број и сваки паран савршен број је тог облика.*

Доказ. Нека је $k = 2^p - 1$ прост број и $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$. Да би показали да је број n савршен треба показати да је $\sigma(n) = 2n$. Пошто је функција σ мултипликативна и $\sigma(k) = k + 1 = 2^p$, то је

$$\begin{aligned}\sigma(n) &= \sigma\left(2^{p-1}\right) \cdot \sigma(k)\\ &= \left(1 + 2 + 2^2 + \cdots 2^{p-1}\right) \cdot 2^p\\ &= (2^p - 1) \cdot 2 \cdot 2^{p-1} = 2n,\end{aligned}$$

одакле следи да је број n савршен.

Обрнуто, нека је n произвољан паран савршен број. Запишимо га у облику $n = 2^{p-1}m$, где је m непаран број и $p \geqslant 2$. Из мултипликативности функције σ следи:

$$\sigma\left(2^{p-1}m\right) = \sigma\left(2^{p-1}\right)\sigma(m) = (2^p - 1) \cdot \sigma(m).$$

С друге стране, пошто је n савршен број то је

$$\sigma(n) = 2n = 2^p m.$$

Из претходне две једнакости следи:

$$2^p m = (2^p - 1) \cdot \sigma(m),$$

па закључујемо да $2^p - 1$ дели $2^p m$, тј. да $2^p - 1$ дели m. Према томе, $m = (2^p - 1)M$. Замењујући то у претходну једнакост добијамо

$$2^p(2^p - 1)M = (2^p - 1) \cdot \sigma(m), \quad \text{тј.} \quad 2^p M = \sigma(m).$$

Како су и m и M делиоци од m то је

$$2^p M = \sigma(m) \geqslant m + M = 2^p M,$$

па је $\sigma(m) = m + M$. То значи да је број m прост и једина његова два делиоца су m и $1 = M$. Према томе, $m = 2^p - 1$ је прост број, што је и требало доказати.

Напоменимо да није познато да ли постоје непарни савршени бројеви. Ово је један од најстаријих нерешених проблема у математици. Познато је једино да би такав број ако постоји морао имати најмање 300 цифара у декадном запису и да би морао имати прост делилац већи од 10^{20}.

Иначе, парни савршени бројеви се могу завршавати једино цифрама 6 и 8, што се лако може показати коришћењем теореме 4.

Налажење што већег простог броја је велики изазов за многе математичаре. Данас се то углавном своди на налажење што већег Мерсеновог простог броја.

Џорџ Волтман је 1996. године основао међународно удружење GIMPS (the Great Internet Mersenne Prime Search) које има преко 100000 чланова који трагају за што већим Мерсеновим простим бројем. При том користе интернет и заједнички централни рачунар (GIMPS) за тестирање и проверу. До оснивања овог удружења била су позната 34 *Мерсенова проста броја, а до сада је откривено још 6.*

35. Мерсенов прост број је $2^{1398269}-1$, откривен је 1996. године (Armengaud, Woltman) и има 420 921 цифара у декадном запису, 36. је $2^{2976221}-1$ (1997, Spence, Woltman , 895 932 цифара), 37. је $2^{3021377}-1$ (1998, Clarkson, Woltman, Kurowski, 909 526 цифара).

38. Мерсенов прост број $2^{6972593}-1$ је откривен 1999. (Clarkson, Woltman, Kurowski) и то је био први откривени прост број са више од 1 000 000 цифара. У његовом декадном запису учествује 2 098 960 цифара. За налажење овог броја исплаћена је награда од 50000$.

После тога су откривена још два Мерсенова проста броја и то $2^{13466917}-1$ (Cameron, Woltman, Kurowski 2001. године, 4 053 946 цифара) и

$$2^{20996011}-1$$

(Shafer, Woltman, Kurowski 17. новембра 2003. године), али још траје провера да ли је до сада највећи откривени прост број (у чијем декадном запису учествује 6 320 430 цифара) 40. Мерсенов прост број или можда има још неки мањи од њега који није познат. Можда ће то бити познато када ви будете читали овај чланак. Можда ће до тада бити откривен још неки Мерсенов прост број. Зато посетите сајт

`http://www.mersenne.org/status.htm`

где се резултати ажурирају на сваких сат времена!

Актуелна је награда од **100 000$** за прву особа која пронађе прост број са више од 10 000 000 цифара.

Вратимо се на почетак наше приче и на питање колико има савршених природних бројева. Већ је напоменуто да се не зна да ли постоје непарни савршени природни бројеви, а према теореми 4, парних савршених бројева има онолико колико има Мерсенових простих бројева. Дакле, до сада је познато само 40 савршених бројева. Највећи од њих има 12 640 859 цифара.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2003/04 година