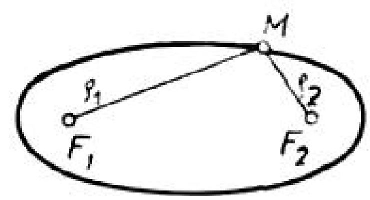
Miroslav Živković (Beograd)

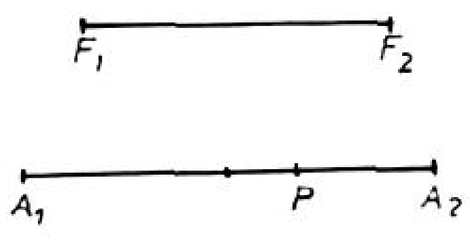
ELIPSA I DOKAZ DA KOSI PRESEK PRAVOG KRUŽNOG VALJKA PREDSTAVJA ELIPSU

1. Elipsa je zatvorena kriva u ravni (sl. 1), takva da je zbir odstojanja bilo koje njene tačke M od dve stalne tačke u njenoj ravni (dva „fokusa" ili „žiže" F_1 i F_2) konstantan (i obeležava se obično sa $2a$).

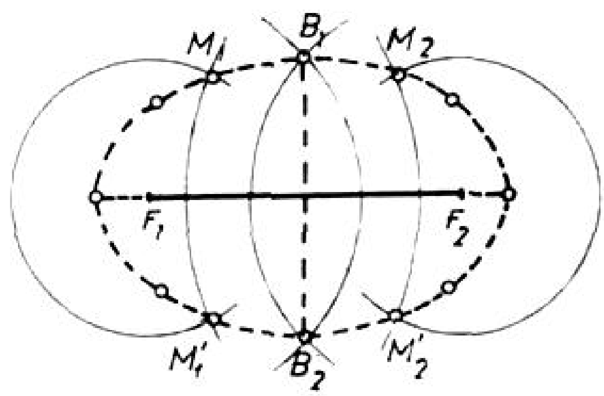


Sl. 1

Konstrukcija elipse ne može se obaviti pomoću šestara i lenjira, tačnije ne može se odjednom konstruisati cela elipsa, već se šestarom može konstruisati samo proizvoljan broj njenih tačaka. Tako, ako su nam date duži $F_1F_2 = 2e$ i $A_1A_2 = \rho_1 + \rho_2 = 2a$ $(2e < 2a$, sl. 2), onda se postupa ovako; a) najpre se konstruiše duž F_1F_2 (sl. 3); b) zatim se uzme u šestar proizvoljna duž A_1P (sl. 2), no tako da je $a - e \leqslant A_1P \leqslant a + e$, pa se oko fokusa F_1 i F_2 (sl. 3) opišu luci l_1 i l_2; c) i, naposletku se uzme u šestar duž PA_2, pa se konstruišu oko fokusa F_2 i F_1 luci l_1' i l_2' i odrede presečne tačke M_1, M_1', M_2 i M_2'. Ove tačke sigurno pripadaju traženoj elipsi, jer je $F_1M_1 + F_2M_1 = F_1M_1' + F_2M_1' = F_1M_2 + F_2M_2 = F_1M_2' + F_2'M_2 = A_1A_2$.



Sl. 2



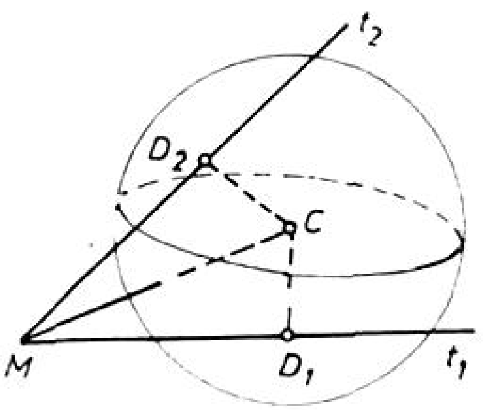
Sl. 3

Menjajući položaj tačke P na duži A_1A_2 može se dobiti još proizvoljan broj ovakvih četvorki tačaka elipse, a iz same navedene konstrukcije proizalazi sledeće; a) da je elipsa simetrična kriva u odnosu na pravu F_1F_2 i u odnosu na simetralu duži F_1F_2; b) da kriva preseca pravu F_1F_2 tako da je rastojanje tih preseka (tzv. „velika osa elipse“) jednaka datoj duži $A_1A_2 = 2a$; i c) da kriva preseca simetralu duži F_1F_2 u dvema tačkama B_1, B_2, od kojih je svaka podjednako udaljena od fokusa F_1 i F_2, te tako duž B_1B_2 predstavlja tzv. „malu osu“ elipse, koja se obično obeležava sa $2b$.

Usled toga između a, b i c postoji veza $b^2 = a^2 + e^2$.

2. Poznato je da tangete kruga povučene iz date tačke imaju jednake duži od date tačke do dodirnih tačaka. Slično ovome, za tangente lopte važi;

THEOREMA 1. *Tangente povučene iz date tačke na loptu imaju jednake dužine od date tačke do dodirnih tačaka.*



Sl. 4

D o k a z. Neka su iz date tačke M na loptu L povučene tangente t_1 i t_2 (sl. 4), čije dodirne tačke sa loptom L su D_1 i D_2. Ako se centar C spoji sa tačkom N, onda se obrazuju dva pravougla trougla MD_1C i MD_2C, jer imaju zajedničku hipotenuzu MC, a katete CD_1 i CD_2 su im jednake, kao poludrečnici lopte L. Prema ovome, i katete MD_1 i MD_2 su im jednake, tj. $MD_1 = MD_2$, čime je dokazana teorema 1.

Ako se prava kružna cilindrična površina preseče koso jednom ravni tako da ova seče sve izvodnice cilindrične površi, onda se dobija zatvorena kriva za koju važi;

THEOREMA 2. *Zbir odstojanja bilo koje tačke krive l od dve stalne tačke njene površi je konstantan.*

D o k a z. Ako se iznad i ispod ravni preseka (sl. 5) u valjak upiše po jedna lopta tako da prva od njih dodiruje ravan preseka u tački F_1 i druga je dodiruje u tački F_2, onda za bilo koju tačku M krive l, prema teoremi 1, za tangente povučene iz tačke M na lopte L_1 i L_2 važi; $MF_1 = MN_1$ i $MF_2 + MN_2$.

Iz ovih jednakosti izilazi da je

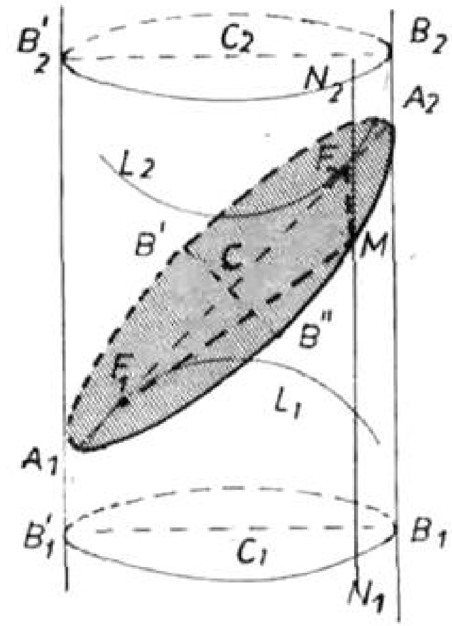
$$MF_1 + MF_2 = MN_1 + MN_2 =$$
$$= M_1N_2 = B_1B_2,$$

jer su N_1N_2 i B_1B_2 jednaki delovi izvodnica cilindrične površi.

Prema teoremi 1 takođe je $A_1F_2 = A_1B_2'$ i $A_2F_2 = A_2B_2$, a odavde izlazi da je $A_1F_2 + A_2F_2 = A_1B_2' + A_2B_2 = B_1A_2 + A_2B_2 = B_1B_2$, odnosno, ako je $A_1A_2 = 2a$, onda je $2a = B_1B_2$, jer je $A_1B_2' = A_2B_1$.

Iz prethodnog izlazi sada da je $MF_1 + MF_2 = 2a$, gde je $2a$ konstanta, i ovim je dokazana teorema 2.

Prema tome je kosi presek kružnog valjka, do kojeg dolazi ako se valjak preseče jednom ravni, elipsa.



Sl. 5

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија