# Републички натпревар 2003

## I година

**1.** Определи го бројот $n$ , ако тој ги исполнува следните три услови:
а) сите негови цифри се различни
б) од неговите цифри може, да се состават шест различни двоцифрени броеви
в) збирот на тие двоцифрени броеви е $2n$ .

**Решение.** Од условот б) добиваме дека бројот $n$ е троцифрен број. Нека $n=\overline{abc}$ каде $a,\ b,\ c$ се цифри кои се меѓу себе различни. Тогаш збирот на броевите $\overline{ab},\overline{bc},\overline{ac},\overline{ca},\overline{cb},\overline{ba}$ е $2n=2\overline{abc}$ , т.е.

$$\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ac}+\overline{ca}+\overline{cb}+\overline{ba}=2\cdot\overline{abc}$$

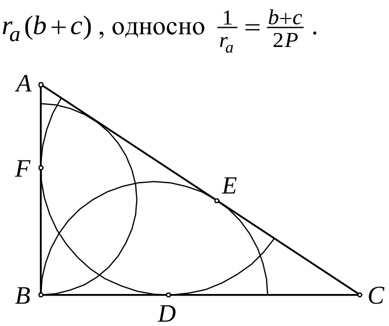
Според тоа

$$22(a+b+c)=200a+20b+2c \Rightarrow\ 178a-2b-20c=0\ \Rightarrow 89a-b-10c=0$$

Последното равенство можеме да го запишеме во облик $a+b=10(9a-c)$ Бидејќи $a+b\le 18$, добиваме $9a-c<2$, т.е $9a-c=1$. Заради равенството $9a=1+c$ добиваме $a=1$ и $c=8$. Конечно, $b=9$ и барниот број е $198$ .

**2.** Триаголник $ABC$ е правоголен, со прав агол во темето $B$ . Повлечени се три полукружници $s_1,s_2,s_3$ , такви што: дијаметарот на полукружницата $s_1$ лежи на хипотенузата $AC$ и ги допира двете катети, дијаметрите на кружниците $s_2$ и $s_3$ лежат на катетите $AB$ и $BC$ соодветно, едниот крај им е во темето $B$ и ја допираат хипотенузата $AC$ . Ако $r_b,r_c,r_a$ се радиусите на кружниците $s_1,s_2,s_3$ соодветно а $r$ е радиусот на впишаната кружница во триаголникот $ABC$ , тогаш $\frac{2}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}$ . Докажи!

**Решение.** Ако $D$ е центар на полукружницата $s_3$ , тогаш триаголникот $ABD$ има основа $\overline{AB}=c$ и висина $r_a$ па неговата плоштина е $P_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}cr_a$ . Триаголникот $ACD$ има основа $\overline{AC}=b$ и висина $r_a$ , па според тоа $P_{\Delta ACD}=\frac{1}{2}br_a$ . Ако $P$ е плоштина на триаголникот $ABC$ , тогаш $P=\frac{1}{2}r_a(b+c)$ , односно $\frac{1}{r_a}=\frac{b+c}{2P}$ .



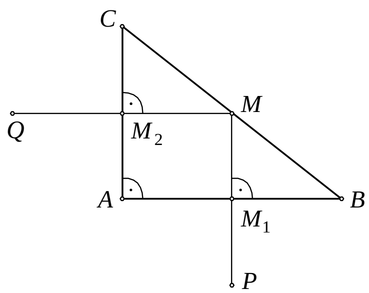

Слично, ако $E$ е центар на полукружницата $s_1$ , тогаш триаголникот $BEA$ има основа $\overline{BA}=c$ и висина $r_b$ па според тоа, неговата плоштина е $P_{\Delta BEA}=\frac{1}{2}r_bc$ Триаголникот $BEC$ има основа $\overline{BC}=a$ и висина $r_b$ па според тоа $P_{\triangle BEC}=\frac{1}{2}ar_b$. Значи $P=\frac{1}{2}r_b(a+c)$, односно $\frac{1}{r_b}=\frac{a+c}{2P}$.

Со потполно аналогни разгледувања се добива дека $\frac{1}{r_c}=\frac{a+b}{2P}$.

Ако земеме во предвид дека $P=\frac{1}{2}r(a+b+c)$ каде $r$ е радиусот на впишаната кружница, добиваме дека

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{a+b}{2P}+\frac{b+c}{2P}+\frac{c+a}{2P}=\frac{2(a+b+c)}{2P}=\frac{a+b+c}{P}=\frac{2}{r}.$$

**3.** Нека $M$ е произволна точка од хипотенузата $BC$ на правоаголниот триаголник $ABC$. Точките $P$ и $Q$ се осносиметрични точки на точката $M$ во однос на $AB$ и $AC$, соодветно. Докажи дека $\overline{MP}\cdot\overline{MQ}\le\overline{AB}\cdot\overline{AC}$.




**Решение.** Нека $M_1$ и $M_2$ се проекциите на $M$ врз катетите $AB$ и $AC$ соодветно. Од сличноста $\triangle BM_1M\sim\triangle BAC$ имаме $\frac{\overline{MM_1}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{MB}}{\overline{BC}}$. Од сличноста $\triangle MM_2C\sim\triangle BAC$ следува дека $\frac{\overline{MM_2}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{MC}}{\overline{BC}}$. Со множење на последните две равенства добиваме

$$\frac{\overline{MM_2}}{\overline{AB}}\frac{\overline{MM_1}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{MC}\cdot\overline{MB}}{\overline{BC}^2}=\frac{\overline{MC}\cdot\overline{MB}}{(\overline{MC}+\overline{MB})^2}\le\frac{1}{4}.$$

Последното неравенство се добива од неравенството $(\overline{MC}-\overline{MB})^2\ge 0$. Од равенствата $\overline{MP}=2\overline{MM_1}$ и $\overline{MQ}=2\overline{MM_2}$, неравенството $\frac{\overline{MM_2}}{\overline{AB}}\frac{\overline{MM_1}}{\overline{AC}}\le\frac{1}{4}$ го добива обликот $\frac{2\overline{MM_2}}{\overline{AB}}\frac{2\overline{MM_1}}{\overline{AC}}\le 1$, т.е. $\frac{\overline{MP}\cdot\overline{MQ}}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}\le 1$, што и требаше да се докаже.

**4.** На први декември минатата година еден ученик почнал да се подготвува за регионалниот натпревар по математика кој се одржа на први март оваа година. Тој секој ден решавал по една задача, но за да не се премори, во текот на една седмица (од понеделник до недела) решавал најмногу дванаесет задачи. Покажи дека во текот на неговите подготовки за натпреварот, постојат неколку последователни дена во кои ученикот решил точно 21 задача.

**Решение**. Нека $a_i$ е бројот на задачи што ученикот ги решил од почетокот до $i$-тиот ден вклучувајќи го и $i$-тиот ден. За оваа низа е исполнет условот $a_{i+1}\ge a_i+1$. Бидејќи во дадениот временски период во кој ученикот се припремал за натпревар има деведесет дена, горната низа има барем седумдесет и седум $a_r, a_{r+1},\ldots,a_{r+76}$ члена кои се придружени на деновите од точно единаесет седмици. Бидејќи ученикот во секоја од тие седмици решава најмногу по дванаесет задачи, добиваме дека $a_{r+76} \le 12 \cdot 11 = 132$.

Ја формираме низата $a_r + 21, a_{r+1} + 21, ..., a_{r+76} + 21$, која го има погорното својство како и првобитната низа, т.е. е монотоно растечка. Двете низи заедно имаат $154$, кои можат да бидат некои од броевите

$$1, 2, 3, ..., 132, 133, ..., 153 = 132 + 21.$$

Според принципот на Дирихле, постојат 2 члена од тие две низи (од секоја низа по еден бидејќи и двете се строго монотоно растечки) кои се еднакви меѓу себе. Значи, постои $a_p + 21$ и $a_q$ така што $a_p + 21 = a_q$. Според тоа, во деновите $p+1, p+2, ..., q$ ученикот решил точно $21$ задача.

**II година**

**1.** Да се најдат три последователни непарни броеви $a, b$ и $c$ така што $a^2 + b^2 + c^2$ е четирицифрен број кој е составен од исти цифри (запишан со исти цифри).

**Решение.** Нека $a = 2n - 1$, $b = 2n + 1$ и $c = 2n + 3$ се три последователни непарни броеви. Збирот на нивните квадрати е

$$a^2 + b^2 + c^2 = (2n-1)^2 + (2n+1)^2 + (2n+3)^2 = 12n(n+1) + 11.$$

Значи бројот $12n(n+1) + 11$ треба да е четирицифрен број составен (запишан) со истите цифри, т.е. да е некој од броевите 1111, 2222, 3333, 4444, 5555, 6666, 7777, 8888, 9999. Разликата на тие броеви и бројот 11 треба да е број кој е делив со 12. Од броевите $1100, 2211, 3322, 4433, 5544, 6655, 7766, 8877, 9988$ ќе ги издвоиме оние кои се деливи со 12. Единствен таков е 5544. За него важи $5544 = 12 \cdot 21 \cdot 22$ и

$$5555 = (2 \cdot 21 - 1)^2 + (2 \cdot 21 + 1)^2 + (2 \cdot 21 + 3)^2.$$

Според тоа, бараните последователни непарни броеви се $41, 43, 45$.

**2.** Определи ги сите реални вредности на параметарот $a$ за кои системот равенки

$$\begin{cases} x - y = a(1 + xy) \\ x + y + xy + 2 = 0 \end{cases}$$

има единствено решение.

**Решение.** Системот ќе го запишеме во облик

$$\begin{cases} x - y = a(1 + xy) \\ x + y = -xy - 2 \end{cases}$$

Ако ги квадрираме двете равенки и од втората квадрирана ја одземеме првата квадрирана равенка добиваме

$$(x+y)^2-(x-y)^2=(2+xy)^2-a^2(1+xy)^2$$

која може да се запише во облик $(1-a^2)(xy)^2-2a^2(xy)+4-a^2=0$. Ако вовеме смена $xy=t$, добиваме квадратна равенка

$$(1-a^2)t^2-2a^2t+4-a^2=0. \qquad (1)$$

Системот има едно единствено решение, ако и само ако квадратната равенка (1) има единствено решение. Квадратната равенка (1) има единствено решение ако и само ако

а) $1-a^2=0$, т.е. $a=1$ или $a=-1$.

б) $D=a^4-(1-a^2)(4-a^2)=0$, т.е. $5a^2=4$

Значи, системот има единствено решение ако и само ако

$$a=-1, a=1, a=\pm\tfrac{2}{\sqrt{5}}.$$

**3.** Нека $5a+3b+3c=0$, каде $a,b$ и $c$ се реални броеви и $a\neq 0$. Докажи дека квадратната равенка $ax^2+bx+c=0$ им барем едно решение $x_\circ$, такво што $x_\circ\in[0,2]$.

**Решение.** За квадратната функција $f(x)=ax^2+bx+c$ имаме $f(0)=c$, $f(1)=a+b+c$ и $f(2)=4a+2b+c$. Според тоа $f(0)+f(1)+f(2)=5a+3b+c=0$. Ако броевите $f(0), f(1), f(2)\neq 0$, тогаш два од нив се позитивни еден е негативен или еден од нив е позитивен а другите два се негативни. Може да се разгледаат сите комбинации од претходниот дел, па според тоа, во сите случаи постои точка $x_0\in[0,2]$, така што $f(x_0)=0$, т.е. $ax_0^2+bx_0+c=0$.

Навистина,

$1^\circ$ $f(0),\ \ f(1)>0,\ \ f(2)<0$. Постои $x_0\in(1,2)$ така што $ax_0^2+bx_0+c=0$

$2^\circ$ $f(0)$, $f(2)>0$, $f(1)<0$. Постојат $x_0\in(0,1)$ и $x_1\in(1,2)$ такви што $ax_0^2+bx_0+c=0$ и $ax_1^2+bx_1+c=0$.

$3^\circ$ $f(1),\ \ f(2)>0,\ \ f(0)<0$. Постои $x_0\in(0,1)$ такви што $ax_0^2+bx_0+c=0$.

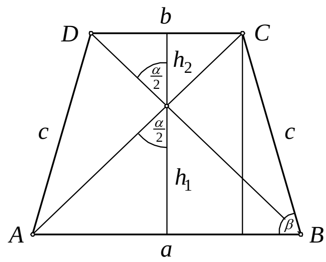
$4^\circ$ $f(0),\ \ f(1)<0,\ \ f(2)>0$. Постои $x_0\in(1,2)$ така што $ax_0^2+bx_0+c=0$.

$5^\circ$ $f(0),\ \ f(2)<0,\ \ f(1)>0$. Постојат $x_0\in(0,1)$ и $x_1\in(1,2)$ такви што $ax_0^2+bx_0+c=0$ и $ax_1^2+bx_1+c=0$.

$6^\circ$ $f(1),\ \ f(2)<0,\ \ f(0)>0$. Постои $x_0\in(0,1)$ така што $ax_0^2+bx_0+c=0$.

Случајот кога еден од броевите $f(0),\ \ f(1),\ \ f(2)$ е нула е тривијален.

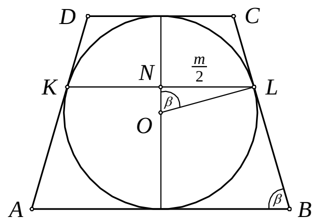
**4.** Нека $ABCD$ е рамнокрак тангентен трапез, при што впишаната кружница ги допира краците $BC$ и $AD$ во точките $L$ и $K$ соодветно. Пресметај ја плоштината на трапезот, ако $\alpha$ е аголот меѓу дијагоналите и $\overline{KL} = m$.




**Решение.** Во рамнкрак тангентен трапез со основи $a$ и $b$ и крак $c$ исполнето е равенството $a+b=2c$. Ако $E$ е пресек на дијагоналите на трапезот и $h_1$ и $h_2$ се висини на триаголниците $ABE$ и $ECD$ спуштени од темето $E$ соодветно, тогаш $h_1+h_2$ е висина на трапезот. Нека $E_1 \in AB$ и $E_2 \in CD$ се подножја на висините спуштени од точката $E$.

Ако $\beta$ е аголот кај темето $B$ во трапезот, тогаш

$$\sin\beta = \frac{h}{c} \qquad (1)$$




Од друга страна, од правоаголните триаголници $AE_1E$ и $DE_2E$ имаме $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{h_1}{\frac{a}{2}}$ и $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{h_2}{\frac{b}{2}}$, т.е. $h_1 = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ и $h_2 = \frac{b}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, соодветно. Според тоа

$$h_1+h_2 = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \frac{b}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a+b}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = c\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме дека $\sin\beta = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Ако $r$ е радиусот на впишаната кружница со центар $O$, тогаш од правоаголниот триаголник $ONL$ имаме

$$\sin\beta = \frac{\frac{m}{2}}{r} = \frac{m}{2r} = \frac{m}{h}, \text{ т.е. } \quad h = \frac{m}{\sin\beta}.$$

Конечно,

$$P = \frac{a+b}{2}h = c\cdot\frac{m}{\sin\beta} = \frac{m}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\sin\beta}\cdot\frac{m}{\sin\beta} = m^2 \operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}.$$

**III година**

**1.** Докажи дека, ако $a,b,c>1$ или $0<a,b,c<1$, тогаш

$$\frac{\log_b a^2}{a+b} + \frac{\log_c b^2}{b+c} + \frac{\log_a c^2}{c+a} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

**Решение.** Заради $a,b,c>1$ или $0<a,b,c<1$ важи $\log_b a, \log_c b, \log_a c > 0$, па сите собироци се позитивни. Ако два пати го примениме неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$\frac{\log_b a^2}{a+b} + \frac{\log_c b^2}{b+c} + \frac{\log_a c^2}{c+a} = 2\left(\frac{\log_b a}{a+b} + \frac{\log_c b}{b+c} + \frac{\log_a c}{c+a}\right) \geq 2\cdot 3\sqrt[3]{\frac{\log_b a}{a+b}\,\frac{\log_c b}{b+c}\,\frac{\log_a c}{c+a}}$$

$$= 6\frac{\sqrt[3]{\frac{\lg a}{\lg b}\frac{\lg b}{\lg c}\frac{\lg c}{\lg a}}}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}} = \frac{6}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}$$

$$\geq 6\frac{3}{(a+b)+(b+c)+(c+a)}=\frac{9}{a+b+c}$$

**2.** Во внатрешноста на триаголникот $ABC$ избрана е точка $M$ така што

$$\measuredangle MAB=\measuredangle MBC=\measuredangle MCA=\varphi .$$

Докажи дека $\frac{1}{\sin^2\varphi}=\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\gamma}$ .

**Решение.** Имаме $P_{\triangle ABC}=P_{\triangle ABM}+P_{\triangle BCM}+P_{\triangle CAM}$ . Натаму важи

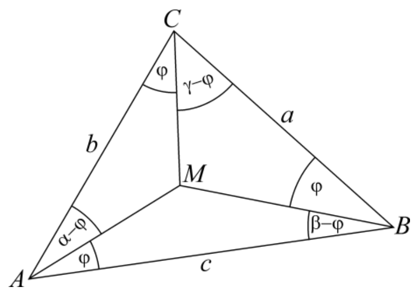
$$P_{\triangle ABM}=\frac{1}{2}\overline{MA}\cdot\overline{MB}\sin(180^\circ-(\varphi+\beta-\varphi))=\frac{1}{2}\overline{MA}\cdot\overline{MB}\sin\beta$$

$$P_{\triangle BCM}=\frac{1}{2}\overline{MB}\cdot\overline{MC}\sin(180^\circ-(\varphi+\gamma-\varphi))=\frac{1}{2}\overline{MB}\cdot\overline{MC}\sin\gamma$$

$$P_{\Delta CAM}=\frac{1}{2}\overline{MC}\cdot\overline{MA}\sin(180^\circ-(\varphi+\alpha-\varphi))=\frac{1}{2}\overline{MC}\cdot\overline{MA}\sin\alpha ,$$

па оттука за плоштината на триаголникот $ABC$ добиваме

$$P=\frac{1}{2}(\overline{MA}\cdot\overline{MB}\sin\beta+\overline{MB}\cdot\overline{MC}\sin\gamma+\overline{MC}\cdot\overline{MA}\sin\alpha) .$$




Сега да ја примениме синусната теорема на триаголникот $CAM$ :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{AC}}=\frac{\sin\varphi}{\sin(180^\circ-(\varphi+\alpha-\varphi))}=\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha},$$

односно $\overline{MA}=b\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}$. Слично ако ја примениме синусната теорема на триаголниците $ABM$ и $BCM$ добиваме $\overline{MB}=c\frac{\sin\varphi}{\sin\beta}$ и $\overline{MC}=a\frac{\sin\varphi}{\sin\gamma}$. Ако последниве три равенства ги замениме во изразот за плоштината добиваме

$$P=\frac{1}{2}(bc\frac{\sin^2\varphi}{\sin\alpha\sin\beta}\sin\beta+ac\frac{\sin^2\varphi}{\sin\beta\sin\gamma}\sin\gamma+ab\frac{\sin^2\varphi}{\sin\alpha\sin\gamma}\sin\alpha)$$

$$=\frac{1}{2}bc\frac{\sin^2\varphi}{\sin\alpha}+\frac{1}{2}ac\frac{\sin^2\varphi}{\sin\beta}+\frac{1}{2}ab\frac{\sin^2\varphi}{\sin\gamma}$$

За плоштината $P$ на триаголникот $ABC$ важи

$$P=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}ac\sin\beta=\frac{1}{2}ab\sin\gamma ,$$

па добиваме

$$P=\frac{P}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin^2\varphi}{\sin\alpha}+\frac{P}{\sin\beta}\cdot\frac{\sin^2\varphi}{\sin\beta}+\frac{P}{\sin\gamma}\cdot\frac{\sin^2\varphi}{\sin\gamma} ,$$

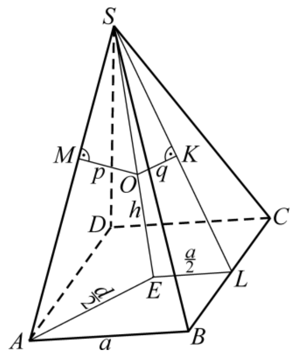
односно

$$\frac{1}{\sin^2\varphi}=\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\gamma} .$$

**3.** Од средината $O$ на висината $SE$ на правилна четиристрана пирамида, со врв $S$, повлечена е нормала $OM$ на бочниот раб и нормала $OK$ на бочниот ѕид на пирамидата. Ако должините на тие нормали се $\overline{OM}=p$ и $\overline{OK}=q$, пресметај го волуменот на пирамидата (т.е. волуменот изрази го преку $p$ и $q$).

**Решение.** Нека основниот раб на пирамидата има должина $a$, дијагоналата на основата $d$ и нека $h=\overline{SE}$. Имаме $\triangle MOS \sim \triangle EAS$, па

$$\frac{p}{\frac{d}{2}}=\frac{\frac{h}{2}}{\sqrt{(\frac{d}{2})^2+h^2}}.$$




Со средување на ова равенство, и земајќи предвид дека $d=a\sqrt{2}$) добиваме

$$\frac{4}{h^2}+\frac{8}{a^2}=\frac{1}{p^2} \tag{1}$$

Од друга страна $\triangle KOS \sim \triangle ELS$ ($L$ е средина на основниот раб), па имаме

$$\frac{q}{\frac{a}{2}}=\frac{\frac{h}{2}}{\sqrt{h^2+(\frac{a}{2})^2}}.$$

Средувајќи го и ова равенство добиваме

$$\frac{16}{a^2}+\frac{4}{h^2}=\frac{1}{q^2} \tag{2}$$

Со одземање на (1) од (2) добиваме $\frac{8}{a^2}=\frac{1}{q^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{p^2-q^2}{p^2q^2}$ и оттука $a^2=\frac{8p^2q^2}{p^2-q^2}$.

Заменувајќи во (1) добиваме $h^2=\frac{4p^2q^2}{2q^2+p^2}$. Сега да го пресметаме волуменот на пирамидата

$$V=\frac{Bh}{3}=\frac{a^2h}{3}=\frac{16p^3q^3}{3(p^2-q^2)\sqrt{2q^2+p^2}}.$$

**4.** Нека $n$ е природен број и $k$ е бројот на различните прости делители на $n$. Тогаш важи $\lg n \ge k\cdot\lg 2$. Докажи!

**Решение.** Нека различните прости делители на $n$ се $p_1,p_2,...,p_k$. Тогаш $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$, каде $\alpha_i\in\mathbb{N}$, $i=1,2,...,k$. Притоа $p_i\ge 2$, $i=1,2,...,k$. Оттука

$$\begin{aligned}\lg n=\lg(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k})&=\alpha_1\lg p_1+\alpha_2\lg p_2+...+\alpha_k\lg p_k\\ &\ge 1\cdot\lg p_1+1\cdot\lg p_2+...+1\cdot\lg p_k\ge\lg 2+\lg 2+...+\lg 2=k\lg 2\end{aligned}$$

**IV година**

**1.** Дадени се позитивните реални броеви $x_1,x_2,x_3$ и $x_4$ за кои важи

$$x_1+x_2+x_3+x_4=1.$$

Нека $s$ е најголемиот меѓу броевите

$$\frac{x_1}{1+x_1}, \frac{x_2}{1+x_1+x_2}, \frac{x_3}{1+x_1+x_2+x_3}, \frac{x_4}{1+x_1+x_2+x_3+x_4} .$$

Која е најмалата вредност што може да ја достигне $s$ ?

**Решение.** Ако $s$ е најголемиот од броевите, тогаш $\frac{1}{s}$ е најмалиот меѓу броевите

$$\frac{1+x_1}{x_1}, \frac{1+x_1+x_2}{x_2}, \frac{1+x_1+x_2+x_3}{x_3}, \frac{1+x_1+x_2+x_3+x_4}{x_4} .$$

Натаму $\frac{1}{s}-1=\frac{1-s}{s}$ е најмалиот меѓу броевите

$$\frac{1+x_1}{x_1}-1=\frac{1}{x_1}, \frac{1+x_1+x_2}{x_2}-1=\frac{1+x_1}{x_2}, \frac{1+x_1+x_2+x_3}{x_3}-1=\frac{1+x_1+x_2}{x_3}, \frac{1+x_1+x_2+x_3+x_4}{x_4}-1=\frac{1+x_1+x_2+x_3}{x_4}$$

а $\frac{s}{1-s}$ е најголемиот меѓу броевите

$$x_1, \frac{x_2}{1+x_1}, \frac{x_3}{1+x_1+x_2}, \frac{x_4}{1+x_1+x_2+x_3} .$$

Конечно $\frac{s}{1-s}+1=\frac{1}{1-s}$ е најголемиот меѓу броевите

$$x_1+1, \frac{1+x_1+x_2}{1+x_1}, \frac{1+x_1+x_2+x_3}{1+x_1+x_2}, \frac{1+x_1+x_2+x_3+x_4}{1+x_1+x_2+x_3} .$$

Бидејќи

$$(x_1+1)\cdot\frac{1+x_1+x_2}{1+x_1}\cdot\frac{1+x_1+x_2+x_3}{1+x_1+x_2}\cdot\frac{1+x_1+x_2+x_3+x_4}{1+x_1+x_2+x_3}=1+x_1+x_2+x_3+x_4=2\le(\frac{1}{1-s})^4$$

Оттука следува дека $\frac{1}{1-s}\ge\sqrt[4]{2}$, па $s\ge1-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$. Значи најмалата вредност $s$ што може да ја достигне $s$ изнесува $1-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ и се достигнува за

$$x_1+1=\sqrt[4]{2}, \frac{1+x_1+x_2}{1+x_1}=\sqrt[4]{2}, \frac{1+x_1+x_2+x_3}{1+x_1+x_2}=\sqrt[4]{2}, \frac{1+x_1+x_2+x_3+x_4}{1+x_1+x_2+x_3}=\sqrt[4]{2} .$$

Од последниве равенства се добива

$$x_1=\sqrt[4]{2}-1, x_2=(\sqrt[4]{2}-1)\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{4}-\sqrt[4]{2},$$
$$x_3=(\sqrt[4]{2}-1)\sqrt[4]{2^2}=\sqrt[4]{8}-\sqrt[4]{4}, x_4=(\sqrt[4]{2}-1)\sqrt[4]{2^3}=2-\sqrt[4]{8}$$

**2.** Нека $a$ е природен број и нека низата $(x_n)$ е дефинирана на следниов начин:

$$x_1=a, x_{n+1}=\begin{cases}\frac{x_n}{2}, & \text{ако } x_n \text{ е парен број}\\ \frac{3x_n+1}{2}, & \text{ако } x_n \text{ е непарен број}\end{cases} .$$

Докажи дека барем еден член од низата е парен број.

**Решение.** Ако $a$ е парен број, тогаш тврдењето е очигледно (бараниот член е $x_1$). Да претпоставиме дека $a$ е непарен, и $a+1=2^k R$ каде $R=2R_1+1$ е непарен и $k$ е природен број. Тогаш $x_1=2^{k+1}R_1+2^k-1$ е непарен, па

$$x_2=\frac{3x_1+1}{2}=\frac{3(2^{k+1}R_1+2^k-1)+1}{2}=3R_1 2^k+3\cdot 2^{k-1}-1=R_2 2^k+3\cdot 2^{k-1}-1.$$

Ако $k=1$, тогаш бараниот член е $x_2$. Во спротивно $x_2$ е непарен, па

$$x_3=\frac{3x_2+1}{2}=R_3 2^{k-1}+3^2\cdot 2^{k-2}-1.$$

Ќе докажеме дека $x_s=R_s 2^{k-s+2}+3^{s-1}2^{k-s+1}-1$ за $1\le s\le k$ (при претпоставка дека сите броеви се непарни). За $s=1$ тврдењето е точно. Нека тврдењето е точно за $s$. Тогаш за $s+1$ имаме

$$x_{s+1}=\frac{3(R_s 2^{k-s+2}+3^{s-1}2^{k-s+1}-1)+1}{2}=R_{s+1}2^{k-(s+1)+2}+3^{(s+1)-1}2^{k-(s+1)+1}-1.$$

Сега за $s=k$ добиваме $x_k=R_k 2^2+3^{k-1}\cdot 2-1$ е непарен. Според тоа

$$x_{k+1}=\frac{3(4R_k+2\cdot 3^{k-1}-1)+1}{2}=6R_k+3^k-1.$$

Броевите $3^k-1$ и $6R_k$ се парни па и $x_k$ е парен.

**3.** Нека $n\ge 1$ е природен број а $a>0$ даден реален број. Најди го бројот на решенија $(x_1,x_2,...,x_n)$ на равенката

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+(a-x_i)^2)=na^2,$$

такви што $x_i\in[0,a]$, за $i=1,2,...,n$.

**Решение.** Дадената равенка ќе ја запишиме во облик

$$\sum_{i=1}^{n}(\ 2x_i^2-2ax_i+a^2)=na^2\ \Leftrightarrow\ \sum_{i=1}^{n}x_i(x_i-a)=0$$

Бидејќи бараме решенија во интервалот $[0,a]$, изразите $x_i-a\le 0$, па според тоа $x_i(x_i-a)\le 0$, $i=1,2,3,4,...,n$. Заради условот $\sum_{i=1}^{n}x_i(x_i-a)=0$, добиваме

$$x_i(x_i-a)=0 \text{ за } i=1,2,3,4,...,n.$$

Според тоа $x_i=0$ или $x_i=a$, $i=1,2,3,4,...,n$. Значи, бројот на решенија е $2^n$.

**4.** Докажи дека $\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n}+...+\cos\frac{(n-1)\pi}{n}=0$ за секој природен број $n$.

**Решение.** Да означиме $S_n=\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n}+...+\cos\frac{(n-1)\pi}{n}$. Да го помножиме последново равенство со $2\sin\frac{\pi}{2n}$ ($2\sin\frac{\pi}{2n}\ne 0$, во спротивно би добиле дека постои цел број $k$ така што $\frac{\pi}{2n}=k\pi$, односно $1=2nk$ што не е можно бидејќи $n$ и $k$ се цели броеви). Тогаш имаме

$$
\begin{aligned}
2\sin\frac{\pi}{2n}S_n &= 2\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{n}+2\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{2\pi}{n}+...+2\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{(n-1)\pi}{n} \\
&= \sin(\frac{\pi}{2n}-\frac{\pi}{n})+\sin(\frac{\pi}{2n}+\frac{\pi}{n})+\sin(\frac{\pi}{2n}-\frac{2\pi}{n})+\sin(\frac{\pi}{2n}+\frac{2\pi}{n})+... \\
&\quad +\sin(\frac{\pi}{2n}-\frac{(n-1)\pi}{n})+\sin(\frac{\pi}{2n}+\frac{(n-1)\pi}{n}) \\
&= -\sin\frac{\pi}{2n}+\sin\frac{3\pi}{2n}-\sin\frac{3\pi}{2n}+\sin\frac{5\pi}{2n}+...-\sin\frac{(2n-3)\pi}{2n}+\sin\frac{(2n-1)\pi}{2n} \\
&= -\sin\frac{\pi}{2n}+\sin\frac{(2n-1)\pi}{2n} = -\sin\frac{\pi}{2n}+\sin(\pi-\frac{\pi}{2n}) = -\sin\frac{\pi}{2n}+\sin\frac{\pi}{2n} = 0.
\end{aligned}
$$

Значи $2\sin\frac{\pi}{2n}S_n = 0$ . Бидејќи $2\sin\frac{\pi}{2n} \neq 0$ добиваме дека $S_n = 0$ .