Три теореме о правилном деветоуглу

***Драгољуб Милошевић*, Горњи Милановац**

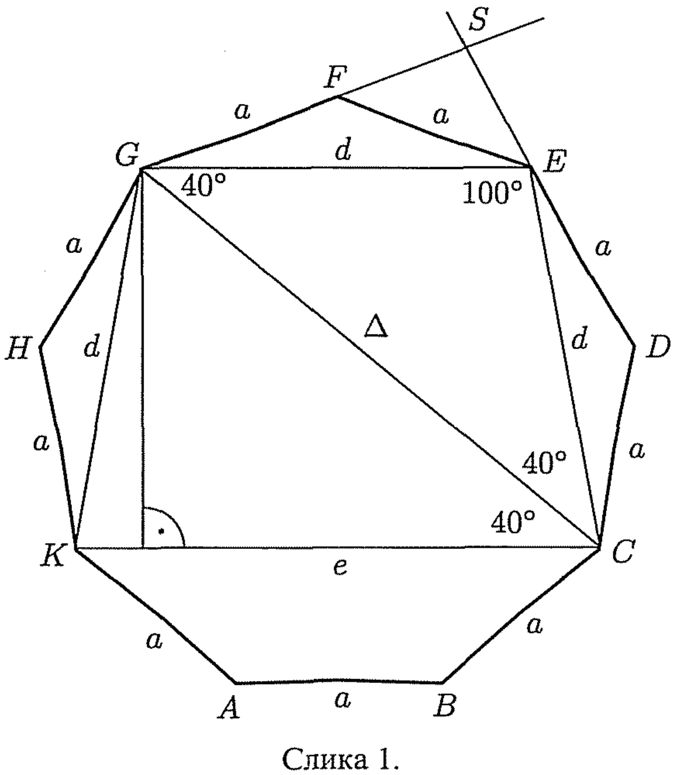
У [1] дат је доказ следеће теореме: *у правилном деветоуглу дужина странице једнака је разлици дужина најдуже и најкраће дијагонале.* Ову теорему користићемо као лему (помоћну теорему), при доказивању следећих трију теорема о правилном деветоуглу.

Теорема 1. У правилном деветоуглу $ABCDEFGHK$ важи једнакост

$$\frac{AD}{AB} - \frac{AB}{AC} = 2.$$

Доказ. Величина централног угла над страницом правилног деветоугла износи $360^\circ : 9 = 40^\circ$, што је и величина његовог спољашњег угла. Величина периферијског угла над страницом тог деветоугла је $40^\circ : 2 = 20^\circ$, а величина унутрашњег угла је $180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$. Уводимо следеће ознаке $AB = a$, $AC = d$, $AD = e$ и $AE = \Delta$ (слика 1). Тада се наведена једнакост може записати као

$$\frac{e}{a} - \frac{a}{d} = 2. \tag{1}$$



Слика 1.

Нека је $CE \cap GF = \{S\}$. У једнакостраничном троуглу CEG ($CE = EG = d$) је $\sphericalangle GCE = \sphericalangle CGE = 40^\circ$ и $\sphericalangle CEG = 180^\circ - 2 \cdot 40^\circ = 100^\circ$. С обзиром на то да је $\sphericalangle GES = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$ и $\sphericalangle KCE = \sphericalangle KCG + \sphericalangle GCE = 40^\circ + 40^\circ = 80^\circ$, следи да је $KC \parallel GE$. Како је $KG = CE = d$ и $KC \parallel GE$, закључујемо да је четвороугао $CEGK$ једнакокраки трапез.

Нека је $GL \perp KC$ и $L \in KC$. Тада је $KL = \dfrac{e-d}{2}$ и $CL = \dfrac{e+d}{2}$. На основу Питагорине теореме примењене на правоугле троуглове GKL и CGL, имамо $GL^2 = GK^2 - KL^2$ и $GL^2 = CG^2 - CL^2$, или $GL^2 = d^2 - \left(\dfrac{e-d}{2}\right)^2$ и $GL^2 = \Delta^2 - \left(\dfrac{e+d}{2}\right)^2$. Последње једнакости дају нову једнакост

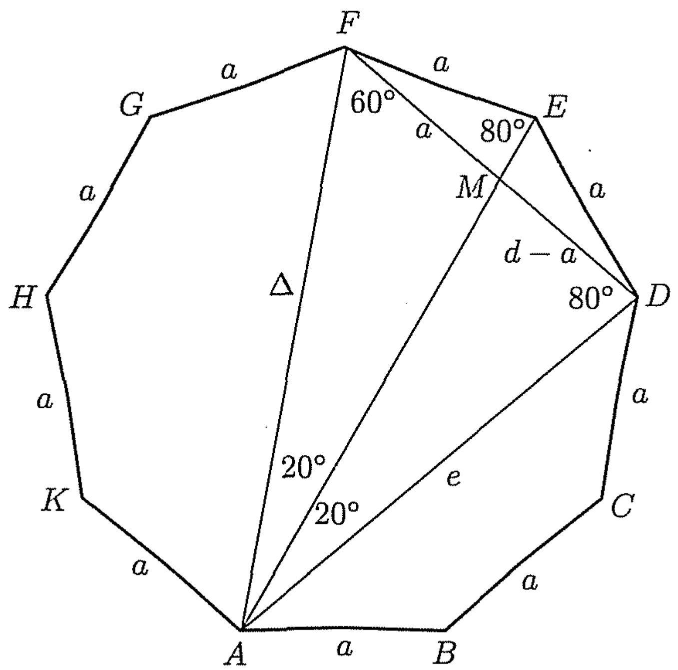
$$d^2 - \left(\frac{e-d}{2}\right)^2 = \Delta^2 - \left(\frac{e+d}{2}\right)^2,$$

а одавде је

$$\begin{aligned}
& \Delta^2 - d^2 = \left(\frac{e+d}{2}\right)^2 - \left(\frac{e-d}{2}\right)^2 \\
\Rightarrow\quad & \Delta^2 - d^2 = de \\
\Rightarrow\quad & (d+a)^2 - d^2 = de \text{ (јер је } \Delta = d + a \text{ према леми)} \\
\Rightarrow\quad & 2ad + a^2 = de \\
\Rightarrow\quad & de - a^2 = 2ad \\
\Rightarrow\quad & \frac{e}{a} - \frac{a}{d} = 2.
\end{aligned}$$

Теорема 2. За правилан деветоугао важи

(2) $$\frac{e}{d} + \frac{d}{\Delta} = 2.$$



Слика 2.

Доказ. Тачку пресека дијагонала AE и DF означимо са M (слика 2). Троугао AEF је једнакокраки ($AE = AF = \Delta$), па је $\sphericalangle AFE = \sphericalangle AEF = (180° - 20°) : 2 = 80°$. Због тога је $\sphericalangle AFD = 80° - 20° = 60°$ и $\sphericalangle FME = 180° - (20° + 80°) = 80°$, што значи да је и троугао EFM једнакокраки. Зато је $FM = EF = a$, па је $DM = d - a$. Троугао ADM је такође једнакокраки.

У троуглу ADF је $\sphericalangle ADF = \sphericalangle ADM = 180° - 40° - 60° = 80°$, а у троуглу ADM је $\sphericalangle AMD = 180° - 20° - 80° = 80°$, па је $AM = AD = e$ и $ME = \Delta - e$. Троуглови EFM и AEF су слични, па је $ME : EF = EF : AE$, или

$$(\Delta - e) : a = a : \Delta, \quad \text{тј.} \quad \Delta^2 - a^2 = \Delta e.$$

Како је $a = \Delta - d$ (лема), имамо $\Delta^2 - (\Delta - d)^2 = \Delta e$, односно $2\Delta d - d^2 = \Delta e$, а ово је еквивалентно са $\dfrac{e}{d} + \dfrac{d}{\Delta} = 2$.

Теорема 3. У правилном деветоуглу је

$$\frac{\Delta}{a} - \frac{e}{\Delta} = 2. \tag{3}$$

Доказ. На основу косинусне теореме примењене на троуглове AEF и ADM (слика 2), имамо $\Delta^2 = a^2 + \Delta^2 - 2a\Delta\cos 80°$ и $e^2 = e^2 + (d-a)^2 - 2e(d-a)\cos 80°$, односно $\cos 80° = \dfrac{a}{2\Delta}$ и $\cos 80° = \dfrac{d-a}{2e}$. Из последње једнакости произлази

$$\frac{a}{\Delta} = \frac{d-a}{e}.$$

Одавде због $d = \Delta - a$ (лема), добијамо $\Delta(\Delta - 2a) = ae$. Ова неједнакост је еквивалентна са траженом једнакошћу.

Задаци

1. Сваку од наведених теорема докажите бар на још један начин.

2. Докажите да у правилном деветоуглу важи једнакост

$$a^3 + R^3\sqrt{3} = 3aR^2,$$

где R представља дужину полупречника кружнице описане око тог деветоугла.

Литература

[1] Д. Милошевић, *Неке теореме о правилном деветоуглу*, Тангента 2/42, 2005/06.

[2] М. Првановић, *Основи геометрије*, Грађевинска књига, Београд, 1987.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2012/13 година