Републички натпревар 1984

I година

1. Да се докаже дека за секој цел број x, $p(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{x}{6}$ е цел број.

Решение. Имаме

$$p(x)=\frac{2x^3+3x^2+x}{6}=\frac{x(x+1)(2x+1)}{6}.$$

Значи, треба да докажеме дека бројот $f(x)=x(x+1)(2x+1)$ е делив со 6, а за тоа е доволно да се докаже дека $f(x)$ е делив со 2 и со 3, бидејќи 2 и 3 се заемно прости.

Производ од два последователни цели броја е делив со 2, па, значи, $x(x+1)$ е делив со 2, т.е. $f(x)$ е делив со 2.

Секој цел број е од облик $3k, 3k+1$ или $3k+2$. Ако $x=3k$, тогаш x е делив со 3; ако $x=3k+1$, тогаш $2x+1=3(2k+1)$, па $2x+1$ е делив со 3; ако $x=3k+2$, тогаш $x+1=3(k+1)$, па $x+1$ е делив со 3. Значи, за кој било цел број x, $f(x)=x(x+1)(2x+1)$ е делив со 3.

2. Која најмала вредност може да ја има најмалиот заеднички содржател на четири природни броја чиј произзвод е 1984.

Решение. Нека $abcd=2^6\cdot 31$ и нека $M=\mathrm{NZS}(a,b,c,d)$. Бидејќи 31 е прост број, еден од броевите е делив со 31, па, значи, и M е делив со 31. Бидејќи $abcd$ е делив со 2^6, следува дека барем еден од броевите е делив со $2^2=4$. Според тоа, M е делив со $2^2\cdot 31=124$. За $a=b=c=4$ и $d=31$ имаме $M=124$; следствено, најмалата вредност што може да ја има M е 124.

3. На шаховска табла, 8×8, поставени се 63 монети од по 5 денари и една монета од 10 денари, така што во секое поле е поставена точно една монета. Дадени се на располагање доволен број монети од по 5, 10 и 20 денари. Можни се следниве замени на три монети од таблата со други три монети:

$(5,5,5)\leftrightarrow(10,10,10)$, $(5,5,10)\leftrightarrow(5,10,20)\leftrightarrow(20,20,10)$,

$(5,10,10)\leftrightarrow(10,10,20)$, $(5,20,20)\leftrightarrow(5,5,20)\leftrightarrow(20,20,20)$

при што редоследот не е битен.

Дали е можно, по конечно многу замени на таблата да бидат поставени 60 монети од по 10 денари, 3 монети од по 20 денари и 1 монета од 5 денари?

Решение. Да забележиме дека со замена на три монети од таблата со други три монети збирот на од вредностите на парите се менува за 15 или 30. Значи, разликата меѓу збировите на вредностите од парите на таблата на почетокот и по неколку замени е делива со 15.

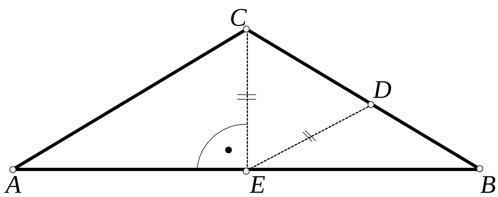
Збирот на вредностите од монетите на почетокот е $63\cdot 5+10=325$, додека на крајот на бараниот распоред е $60\cdot 10+3\cdot 20+1\cdot 5=665$. Нивната разлика е 340, а тој број не е делив со 15.

Значи, одговорот е не.

4. Даден е рамнокрак триаголник со основа $6\,cm$. Да се пресмета плоштината на триаголникот, ако се знае дека средините на краците и врвот лежат на кружница со центар во средината на основата.

Решение. Нека AB основата на рамнокракиот триаголник ABC и нека E и D се средините на AB и BC соодветно (види цртеж). Тогаш $\overline{CE}=\overline{DE}$; но, DE е средна линија, па

$$\overline{DE}=\tfrac{1}{2}\overline{AC}=\tfrac{1}{2}\overline{BC}=\overline{CD}.$$



Според тоа, $\triangle CDE$ е рамностран. Значи, $\measuredangle ECD=\measuredangle ACE=60^\circ$, $\measuredangle EAC=30^\circ$, па $\overline{CE}=\overline{AE}\operatorname{tg}30^\circ=\frac{1}{2}\overline{AB}\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$. Следствено, $P=3\sqrt{3}$.

II година

1. Да се докаже дека за секој природен број n важи равенството

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2n-5}+...+\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{n}(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n-1})$$

Решение. За левата страна L на равенството имаме:

$$\begin{aligned}
L&=\frac{2n}{2n}(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{3(2n-3)}+...+\frac{1}{3(2n-3)}+\frac{1}{2n-1})\\
&=\frac{1}{2n}(\frac{2n}{2n-1}+\frac{2n}{3(2n-3)}+...+\frac{2n}{3(2n-3)}+\frac{2n}{2n-1})\\
&=\frac{1}{2n}(\frac{2n-1+1}{2n-1}+\frac{2n-3+3}{3(2n-3)}+...+\frac{2n-3+3}{3(2n-3)}+\frac{2n-1+1}{2n-1})\\
&=\frac{1}{2n}(1+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2n-3}+...+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2n-1}+1)\\
&=\frac{1}{2n}\cdot 2(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n-1})\\
&=\frac{1}{n}(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n-1})
\end{aligned}$$

2. Дадена е квадратната равенка

$$a^4x^2+5a^2bx+4b^2=0,\ a,b\neq 0.$$

а) Да се докаже дека оваа равенка има реални и различни корени за кои било a и b.

б) Ако корените x_1 и x_2 на равенката го задоволуваат условот

$$4(x_1+x_2)=5(x_1x_2+1),$$

тогаш тие не зависат од a и b. Докажи!

Решение. а) Имаме $D=9a^4b^2>0$, што значи дека корените на равенката се реални и меѓусебно различни за кои било a и b.

б) Според Виетовите правила, равенството $4(x_1+x_2)=5(x_1x_2+1)$ добива облик $2b+a^2=0$, при кој услов равенката се сведува на равенката

$$2x^2-5x+2=0,$$

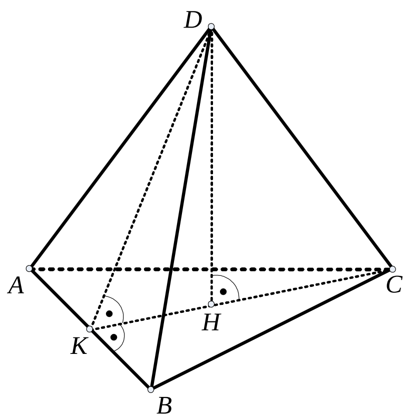
чии корени се $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=2$.

3. Ортогоналната проекција на едно теме на тетраедарот $ABCD$ врз спротивниот ѕид се совпаѓа со ортоцентарот на тој ѕид. Да се докаже дека важат равенствата:

$$\overline{AD}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{CD}^2.$$

Решение. Нека ортогоналната проекција на темето D е ортоцентарот H на триаголникот $\triangle ABC$ и нека K е ортогоналната проекција на D врз работ AB (види цртеж). Тогаш точките K, H и C се колинеарни. Имаме:

$$\begin{aligned}\overline{AD}^2+\overline{BC}^2&=\overline{AK}^2+\overline{KD}^2+\overline{BC}^2\\&=\overline{AC}^2-\overline{CK}^2+\overline{BC}^2+\overline{KD}^2\\&=\overline{AC}^2+\overline{BK}^2+\overline{KD}^2\\&=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2.\end{aligned}$$



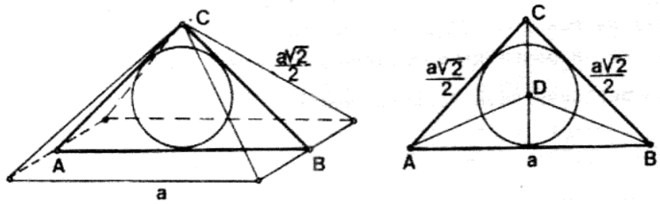
Аналогно се добива и другото равенство.

4. Дадена е коцка со раб a. Ѕидовите на коцката се основи на шест пирамиди чиј заеднички врв е центарот на коцката. Во секоја од пирамидите е впишана сфера. Да се најде волуменот на телото чии темиња се центрите на сферите.

Решение. Телото чии темиња се центрите на сферите е составено од две складни пирамиди слепени со основите. Основата на пирамидата е квадрат со страна $2R$ и висина $\frac{a}{2}-R$, каде што R е радиусот на сферите. Според тоа, ќе имаме

$$V=\frac{8R^2}{3}\left(\frac{a}{2}-R\right). \qquad (1)$$

Значи, за да го најдеме волуменот на телото потребно е да го најдеме радиусот R на сферите.



На горниот лев цртеж е претставена една од шесте пирамиди, а на десниот цртеж е претставен пресекот ABC, каде D е центарот на сферата. Имаме

$$P_{ACD}+P_{BCD}+P_{ABD}=P_{ABC},$$

$$\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}R}{2}+\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}R}{2}+\frac{aR}{2}=\frac{a\cdot\frac{a}{2}}{2},$$

од каде што добиваме $R=\frac{a}{2(\sqrt{2}+1)}$. Заменувајќи во (1) добиваме $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{3(\sqrt{2}+1)^3}$.

III година

1. Иста како задача 1 за втора година.

2. Да се реши неравенката

$$\log_2\frac{6x+2}{x-2}>2$$

Решение. Дадената неравенка е еквивалентна со неравенката

$$\frac{6x+2}{x-2}>4,$$

а таа е, еквивалентна со неравенката

$$(6x+2)(x-2)>4(x-2)^2,$$

т.е. со

$$x^2+3x-10>0,$$

од каде што добиваме дека $x\in(-\infty,-5)\cup(2,+\infty)$.

3. Да се докаже дека постои единствен триаголник чии страни се последователни природни броеви и еден од аглите е двапати поголем од еден од преостанатите два агли.

Решение. Нека страните на триаголникот се $a=n-1$, $b=n$ и $c=n+1$; тогаш $\alpha<\beta<\gamma$, па можни се следниве случаи: (i) $\beta=2\alpha$, (ii) $\gamma=2\beta$, (iii) $\gamma=2\alpha$. Ќе ги разгледаме посебно сите три случаи.

(i) Според синусната теорема, имаме $\frac{n-1}{\sin\alpha}=\frac{n}{\sin\beta}$, т.е. $\frac{n-1}{\sin\alpha}=\frac{n}{\sin 2\alpha}$, па затоа $\frac{n-1}{\sin\alpha}=\frac{n}{2\sin\alpha\cos\alpha}$, од каде што добиваме

$$\cos\alpha = \frac{n}{2(n-1)} \,. \tag{1}$$

Според косинусна теорема, имаме

$$(n-1)^2 = n^2 + (n+1)^2 - 2n(n+1)\cos\alpha \,,$$

т.е.

$$\cos\alpha = \frac{n+4}{2(n+1)} \,. \tag{2}$$

Од (1) и (2) го добиваме равенството

$$\frac{n}{2(n-1)} = \frac{n+4}{2(n+1)} \,,$$

т.е. $n=2$, па страните на триаголникот се $a=1$, $b=2$, $c=3$, што не е можно, зошто $a+b=c$.

(ii) Слично како во (1), користејќи ги синусната и косинусната теорема, добиваме

$$\cos\beta = \frac{n+1}{n} = \frac{n^2+2}{2(n^2-1)} \,,$$

т.е. $n^2-3n-1=0$, чии што корени не се природни броеви.

(iii) Во овој случај го добиваме равенството

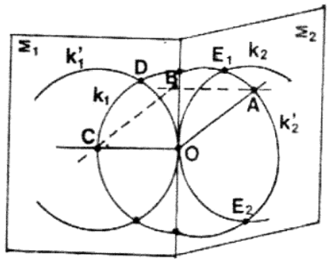
$$\frac{n+1}{2(n-1)} = \frac{n+4}{2(n+1)} \,,$$

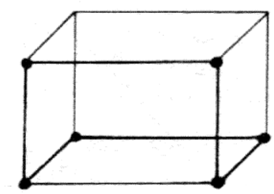
т.е. $n=5$, па страните на триаголникот се $a=4, b=5, c=6$.

4. Дали постои просторен петаголник чии страни се меѓусебно еднакви и чии агли меѓу две соседни страни се прави. Дали постои таков шестаголник?

Решение. Нека $ABCDE$ е таков петаголник (види цртеж лево); тогаш A, B, C се темиња на квадрат $OABC$, а D и E лежат во рамнини нормални на $OABC$, т.е. $D \in \Sigma_1, E \in \Sigma_2$ (види цртеж). Можеме да претпоставиме дека петаголникот е со страна 1; тогаш $D \in k_1$, $E \in k_2$, каде што

- k_1 е кружница во Σ_1 со центар во C и радиус 1,
- k_2 е кружница во Σ_2 со центар во A и радиус 1.





Од $\triangle EDA$ добиваме дека $\overline{AD} = \sqrt{2}$, а потоа од $\triangle AOD$, добиваме дека $\overline{OD} = 1$. Слично добиваме дека $\overline{OE} = 1$. Значи, $D \in k_1'$, $E \in k_2'$, каде што k_i', $i = 1,2$ е кружница во Σ_i, $i=1,2$, со центар O и радиус 1. Нека D е над рамнината $OABC$; тогаш $E \in k_2' \cap k_2 = \{E_1, E_2\}$. Со пресметување добиваме $\overline{DE_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 1$ $\overline{DE_2} = \sqrt{\frac{7}{2}} \neq 1$. Значи, таков петаголник не постои.

Таков шестаголник постои; тој е претставен на цртежот горе десно.

IV година

1. Да се најдат сите реални броеви a и b

$$\begin{cases} \left| \frac{x^y-1}{x^y+1} \right| = a \\ x^2+y^2=b \end{cases} \qquad (1)$$

при условот $x>0$, има единствено решение.

Решение. Нека $S \subseteq \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ е множеството парови (x,y) што го задоволуваат системот (1) при што $x>0$. Од $x^2+y^2=b$ следува дека $b>0$. Ако $(x,y)\in S$, тогаш и $(x,-y)\in S$, што значи дека за системот (1) да има единствено решение, при услов $x>0$, мора да биде $y=0$ и $a=0$. За $a=0$ и $b>1$ системот (1) има решенија $(\sqrt{b},0)$, $(1,\sqrt{b-1})$, $(1,-\sqrt{b-1})$. Според тоа, системот (1) има единствено решение, при услов $x>0$, за $a=0$ и $0<b\leq 1$, и решението е $(\sqrt{b},0)$.

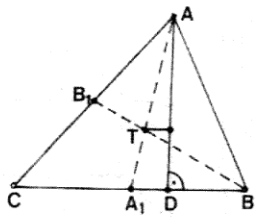
2. Должините на страните на еден триаголник образуваат аритметичка прогресија. Да се докаже дека центарот на впишаната кружница и тежиштето лежат на права паралелна со една од страните на триаголникот.

Решение. Нека

$$\overline{AB}=c,\ \overline{BC}=a+x,\ \overline{CA}=a+2x$$

и нека r е радиусот на впишаната кружница; тогаш

$$r=\frac{2P}{3(a+x)}, \quad P=P_{ABC}.$$



Ако $h_a=\overline{AD}$ е висината повлечена од A кон страната BC, тогаш растојанието од T до страната BC е:

$$d=\frac{1}{3}h_a=\frac{1}{3}\cdot\frac{2P}{\overline{BC}}=\frac{2P}{3(a+x)}=r.$$

Значи, центарот на впишаната кружница и тежиштето се еднакво оддалечени од страната BC, па тие лежат на права паралелна со страната BC.

3. Природните броеви се групирани на следниов начин:

$$\{(1,2),(3)\},\ \{(4,5,6),(7,8)\},\{(9,10,11,12),(13,14,15)\},$$
$$\{(16,17,18,19,20),(21,22,23,24)\},\ \ldots$$

Да се докаже дека групирањето на броевите во секоја од големите загради е извршено така што збировите на броевите во малите загради се исти.

Решение. Да забележиме дека првиот број во првата мала заграда од k-тата голема заграда е k^2, а последниот е k^2+k; значи, во првата мала заграда има $k+1$ број, а во втората k броеви. Според тоа, за збировите S_1 и S_2 на броевите во првата и втората мала заграда соодветно ќе имаме:

$$\begin{aligned} S_1 &= k^2+(k^2+1)+...+(k^2+k) \\ &= (k+1)k^2+(1+2+3+...+k) \\ &= (k+1)k^2+\tfrac{k(k+1)}{2} = \tfrac{k(k+1)(2k+1)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= (k^2+k+1)+(k^2+k+2)+...+(k^2+2k) \\ &= [\underbrace{(k^2+k)++...+(k^2+k)}_{k}]+(1+2+...+k) \\ &= k(k^2+k)+\tfrac{k(k+1)}{2} = \tfrac{k(k+1)(2k+1)}{2} \end{aligned}$$

Следствено, $S_1 = S_2$

4. Нормалниот пресек на тристрана призма $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ е рамностран триаголник ABC со страна a. На бочните рабови B_1B_2 и C_1C_2 се земени две произволни точки P и Q. Нека $\overline{BP}=x$ и $\overline{CQ}=y$.

а) Да се најде врската меѓу x и y за триаголникот APQ да биде правоаголен со прав агол кај темето P.

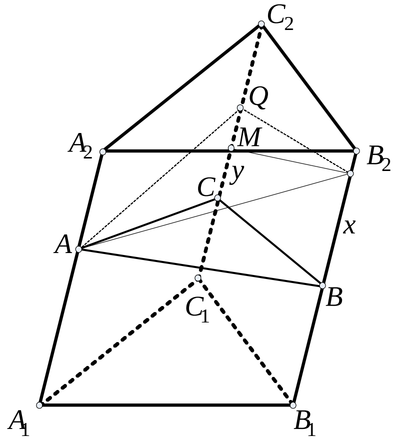
б) Да се определат x и y, така што триаголникот APQ да биде рамнокрак правоаголен со прав агол кај темето P.

Решение. а) Од правоаголните триаголници ABP и ACQ (види цртеж) добиваме $\overline{AP}^2=x^2+y^2$ и $\overline{AQ}=a^2+y^2$. Нека M е точка од работ C_1C_2, така што $PM \parallel BC$; тогаш триаголникот PMQ е правоаголен, па имаме $\overline{PQ}^2=a^2+(y-x)^2$, $y>x$. Ако триаголникот APQ е правоаголен со прав агол кај темето P, тогаш:

$$\overline{AP}^2+\overline{PQ}^2=\overline{AQ}^2,$$

т.е.

$$2x^2-2xy+a^2=0. \qquad (1)$$



б) Според условот на задачата, за триаголникот APQ важат релациите

$$\overline{AP} = \overline{PQ} \text{ и } \overline{AP}^2 + \overline{PQ}^2 = \overline{AQ}^2,$$

т.е.

$$y^2 - 2xy = 0 \quad \text{и} \quad 2x^2 - 2xy + a^2 = 0.$$

При претпоставката $y \neq 0$ добиваме $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $y = a\sqrt{2}$.