Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија

О БРОЈУ 2016

Ратко Тошић, Нови Сад

Позната је прича о томе како је Гаус као ученик основне школе открио формулу за збир првих n природних бројева. У том конкретном случају радило се о збиру бројева од 1 до 100. Једна варијанта његовог поступка је следећа. Означимо збир првих n природних бројева са T_n и испишимо тај збир прво у растућем, а затим у опадајућем поретку. Имамо да је

$$Tn = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n \tag{1}$$

$$Tn = n + (n-1) + \ldots + 2 + 1 \tag{2}$$

Сабирањем једнакости (1) и (2) добијамо да је

$$2Tn = (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1),$$

где се сабирак $n + 1$ на десној страни појављује n пута. (Збир првих сабирака два збира на десној страни је $n + 1$, збир других је $2 + (n - 1) = n + 1$, итд.) Дакле, $2Tn = n(n + 1)$, одакле је

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Број облика $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ назива се *троугаони број*. Разлог је тај што се такав број може представити са T_n тачака распоређених у облику троугла. У сваком реду таквог троугаоног распореда број тачака је за 1 већи него у претходном, тако да је укупан број тачака једнак збиру бројева од 1 до n, тј. једнак је T_n. На слици су представљени троугаони бројеви T_n за $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Показаћемо да је 2016 троугаони број. Заиста.

$$2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 = 32 \cdot 63 = \frac{2 \cdot 32 \cdot 63}{2} = \frac{63 \cdot 64}{2} = T_{63}.$$

Другим речима, број 2016 једнак је збиру прва 63 природна броја.

Како се са овим бројем Математичког листа налазимо на прагу 2016. године, дајемо један скуп задатака у којима фигурише број 2016.

Задаци

1. Колико делитеља има број 2016?

2. Између неких цифара у низу
   а) 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2;
   б) 9 9 9 9 9 9 9 9
   уметни знаке рачунских операција тако да вредност добијеног израза буде 2016. Дозвољено је користити само четири рачунске операције, а није дозвољено користити заграде.

3. Између неких цифара у низу
   а) 2 2 2 2 2 2 2 2 2;
   б) 3 3 3 3 3 3 3 3 3;
   в) 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6;
   г) 9 9 9 9 9 9 9
   уметни знаке рачунских операција (само четири основне) и по потреби постави заграде, тако да вредност добијеног израза буде 2016.

4. Између сваке две цифре у низу
   а) 123456789;
   б) 987654321
   стави знаке неке од четири основне рачунске операције и по потреби користи заграде тако да вредност добијеног израза буде 2016.

5. Представи број 2016 помоћу израза у коме се појављују
   а) 6 четворки;
   б) 5 шестица;
   в) 6 осмица;
   г) 4 деветке.
   Дозвољено је, поред четири основне рачунске операције, користити заграде и знаке квадратног корена и факторијела.

6. У запису

$$М\ А\ Т\ Е\ М\ А\ Т\ И\ К\ А = 2016$$

замени нека слова цифрама, а нека знацима рачунских операција, тако да се добије тачна једнакост. Иста слова се морају заменити истом цифром или истим знаком, а различита различитим.

7. Сваку звездицу замени неком цифром тако да се добије тачан рачун:

а) $* \times **** = 2016$;

б) $* \times *** = 2016$;

в) $** \times *** = 2016$;

г) $** \times ** = 2016$.

8. У запису

$$* \times *** + * = 2016$$

сваку звездицу замени неком цифром тако да се добије тачан рачун.

9. Замени a, b, c, d, e цифрама (различита слова различитим цифрама, а иста слова истим цифрама) тако да се добије тачна једнакост:

$$a \times \overline{bcd} + e = 2016.$$

($\overline{bcd}$ је декадни запис троцифреног броја.)

10. Колико најмање пута треба узастопно исписати број 2016 да би се добио број дељив са 99?

11. Који је најмањи природан број дељив са 5, а чији је збир цифара једнак 2016?

12. Која цифра треба да стоји уместо X да би број

$$\underbrace{88...88}_{2016}X\underbrace{99...99}_{2016}$$

био дељив са 7?

13. Може ли 2016-цифрени број А у чијем се декадном запису појављују само цифре 1 и 8 бити прост?

14. Које године је рођена особа која ће у 2016. години напунити толико година колики је збир цифара године њеног рођења?

15. Да ли је једначина

$$x^2 + y^2 = 2016$$

има решења у скупу природних бројева?

16. На табли је нацртано 2016 тачака, које су темена правилног 2016-угла. Колико најмање тачака треба избрисати тако да међу преосталим тачкама не постоје четири које су темена

а) квадрата;

б) правоугаоника?

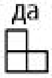
17. Означено је 2016 тачака кружнице које су темена правилног 2016-угла. Колико најмање тачака треба избрисати тако да међу преосталим тачкама не постоје три које су темена
а) једнакостраничног троугла; б) правоуглог троугла?

18. а) Колико има неподударних правоугаоника са целобројним дужинама страница и са површином 2016?
б) Који од тих правоугаоника има најмањи обим?

19. Колико има неподударних квадара са целобројним дужинама ивица и са запремином 2016?

20. Нађи најмањи природан број n такав да се од n квадрата са ивицама целобројне дужине може саставити неки правоугаоник површине 2016.

21. Нађи најмањи природан број n такав да се од n коцки са ивицама целобројне дужине може саставити неки квадар запремине 2016.

22. Докажи да се правоугаоник 4×2016 може поплочати L троминима (тј. плочицама облика  који се састоји од 3 јединична квадрата) тако да свака права која сече правоугаоник сече бар један тромино.

23. Докажи да се сваки троугао може разрезати на 2016 конвексних четвороуглова са једнаким површинама.

24. Нађи највећи природан број са производом цифара 2016 у чијем се декадном запису не појављује цифра 1.

25. Нађи најмањи природан број са производом цифара 2016.

26. Нађи најмањи природан број дељив са 9 и са производом цифара 2016.

27. Нађи највећи природан број чије су све цифре различите, а производ цифара је 2016.

Решења

1. Број 2016 има 36 делитеља.

2. а) $2222 - 222 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2016$;
б) $999 + 999 + 9 + 9 = 2016$.

3. а) $2 \cdot 2 \cdot (22 + 2) \cdot (22 - 2 : 2) = 2016$;
б) $333 \cdot (3 + 3) + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 2016$;
в) $666 \cdot (6 + 6 + 6) : 6 + 6 + 6 + 6 = 2016$;
г) $(999 + 9) \cdot ((9 + 9) : 9) = 2016$.

4. а) $1 + 2 - 3 - 4 \cdot (5 - 6) \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 2016$;
б) $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot (6 - 5) \cdot 4 - 3 + 2 + 1 = 2016$,
$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot (6 + 5 - 4 - 3) \cdot (2 - 1) = 2016$.

5. а) $(44 + 44 - 4) \cdot 4! = 2016$;

б) $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 + 6! = 2016$;

в) $(8 \cdot 8 \cdot 8 - 8) \cdot \sqrt{8+8}$;

г) $(\sqrt{9})! \cdot \sqrt{((\sqrt{9})!)^{(\sqrt{9})!}} + ((\sqrt{9})!)!$.

6. $184 + 1840 - 8 = 2016$.

7. а) $1 \cdot 2016 = 2016$, $2 \cdot 1008 = 2016$;
б) $3 \cdot 672 = 2016$, $4 \cdot 504 = 2016$, $6 \cdot 336 = 2016$, $7 \cdot 288 = 2016$, $8 \cdot 252 = 2016$, $9 \cdot 224 = 2016$;
в) $12 \cdot 168 = 2016$, $14 \cdot 144 = 2016$, $16 \cdot 126 = 2016$, $18 \cdot 112 = 2016$;
г) $21 \cdot 96 = 2016$; $24 \cdot 84 = 2016$, $28 \cdot 72 = 2016$, $32 \cdot 63 = 2016$, $36 \cdot 56 = 2016$.
Применом закона комутативности добија се још пет решења.

8. Једноцифрени број на левој страни једнакости узима вредности од 0 до 9, па производ једноцифреног и троцифреног броја узима вредности од 2007 до 2016. Систематским претраживањем по вредности једноцифреног сабирка налазимо решења:

$3 \cdot 672 + 0 = 2016$;	$4 \cdot 504 + 0 = 2016$;	$6 \cdot 336 + 0 = 2016$;	$7 \cdot 288 + 0 = 2016$;
$8 \cdot 252 + 0 = 2016$;	$9 \cdot 224 + 0 = 2016$;	$5 \cdot 403 + 1 = 2016$;	$3 \cdot 671 + 3 = 2016$;
$4 \cdot 503 + 4 = 2016$;	$3 \cdot 670 + 6 = 2016$;	$5 \cdot 402 + 6 = 2016$;	$6 \cdot 335 + 6 = 2016$;
$7 \cdot 287 + 7 = 2016$;	$4 \cdot 502 + 8 = 2016$;	$8 \cdot 251 + 8 = 2016$;	$3 \cdot 669 + 9 = 2016$;

$$9 \cdot 223 + 9 = 2016.$$

9. Према претходном задатку, решења су:
$3 \cdot 672 + 0 = 2016$; $5 \cdot 403 + 1 = 2016$; $5 \cdot 402 + 6 = 2016$; $4 \cdot 502 + 8 = 2016$.

10. Нека је n тражени број и $A = 20162016\ldots2016$ број који се добије када се 2016 испише n пута узастопно. Збир цифара броја A једнак је $9n$, а разлика збира цифара на парним и збира цифара на непарним местима је $6n - 3n = 3n$. Број A је дељив са 99 ако је дељив и са 9 и са 11. Према познатим критеријумима, A је дељив са 9 ако је $9n$ дељив са 9, за сваки природан број n, а дељив је са 11 ако је $3n$ дељив са 11, тј. n дељив са 11. Дакле, n мора бити дељив са 11, а најмањи такав број је 11.

11. Последња цифра траженог броја је 0 или 5. Међу бројевима чија је последња цифра 0, најмањи са збиром цифара 2016 је број $999\ldots990$ (последња цифра је 0, а испред ње су 224 деветке). Међу бројевима који се завршавају цифром 5, најмањи са збиром цифара 2016 је $4999\ldots995$ (прва цифра је 4, последња 5, а између њих су 223 деветке). Овај последњи је мањи и он је тражени број.

12. Како је број 111111 дељив са 7, то је и сваки шестоцифрен број са једнаким цифрама дељив са 7, па и сваки број који се записује помоћу k једнаких цифара, где је k број дељив са 6. Како је $2016 = 336 \cdot 6$, то ће дати број бити дељив са 7, ако је једноцифрен број X дељив са 7, а то ће бити за $X = 0$ и $X = 7$.

13. Не. Такав број може се записати као збир 2016-цифреног броја B чије су све цифре јединице и неколико бројева облика $7 \cdot 10^k$. Како је број 111111 дељив са 7 ($111111 = 111 \cdot 1001 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$), то је и број B дељив са 7 (јер је број његових цифара дељив са 6), према томе и број A.

14. Нека је редни број тражене године $\overline{abcd}$. Како су a, b, c, d једноцифрени бројеви, постоје две могућности:
1) $a = 1$, у ком случају је $b = 9$, па је по услову задатка

$$1900 + 10c + d + (10 + c + d) = 2016,$$

тј. $11c + 2d = 106$. Одавде лако налазимо да је $c = 8$, $d = 9$, па је једно решење 1989.
2) $a = 2$, у ком случају лако налазимо друго решење 2007.

15. Не. Ако једначина има решење (x, y), онда и x и y морају бити парни бројеви. (Користимо чињеницу да је квадрат парног броја дељив са 4, квадрат непарног броја даје при дељењу са 4 остатак 1, док је број 2016 дељив са 4). Нека је $x = 2m$, $y = 2n$. Тада је

$$(2m)^2 + (2n)^2 = 2016,$$

одакле је $4m^2 + 4n^2 = 2016$, тј. $m^2 + n^2 = 504$. Ако последња једначина има решење (m, n), онда m и n морају бити парни бројеви. Нека је m = 2k, n = 2s. Тада је

$$(2k)^2 + (2s)^2 = 504,$$

одакле је $4k^2 + 4s^2 = 504$, тј. $k^2 + s^2 = 126$. Ако последња једначина има решење (k, s), онда и k и s морају бити непарни бројеви (јер број 126 даје остатак 2 при дељењу са 4). Даље можемо наставити са директном провером или у следећем кораку узети да је k = 2a + 1, s = 2b + 1, одакле се добија да је

$$a(a + 1) + b(b + 1) = 31,$$

што је контрадикција, јер је број са леве стране последње једнакости паран, а број са десне стране непаран.

16. а) Датих 2016 тачака могу се разбити на 504 четворке тако да су тачке сваке четворке – темена квадрата. Из сваке четворке треба избрисати бар једну тачку, тако да је минималан број тачака које треба избрисати једнак 504.
б) Датих 2016 тачака могу се разбити на 1008 парова тако да су тачке сваког пара – крајеви једног пречника кружнице описане око посматраног 2016-угла. Из сваког пара, изузев највише једног, треба избрисати бар једну тачку, тако да је минималан број тачака које треба избрисати једнак 1007.

17. а) Означених 2016 тачака могу се разбити на 672 тројке тако да су тачке сваке тројке - темена једнакостраничног троугла. Из сваке тројке треба избрисати бар једну тачку, тако да је минималан број тачака које треба избрисати једнак 672.
б) Три означене тачке су темена правоуглог троугла ако су неке две од њих крајеви једног пречника. Зато је потребно избрисати бар једну од сваке две дијаметрално супротне тачке; дакле, бар 1008 тачака.

18. а) Број 2016 има 36 делитеља. Од њих се може направити 18 парова делитеља тако да је производ сваka два делитеља из истог пара једнак 2016. Дакле, тражени број је 18.
б) Најмањи обим има правоугаоник са страницама дужине 42 и 48 и он износи $2 \cdot (42 + 48) = 180$.

19. Ако означимо дужине ивица са a, b, c, при чему је $a \le b \le c$, треба наћи број начина да се број 2016 представи у облику abc, уз услов да је $a \le b \le c$. Класификоваћемо те производе по вредности најмањег чиниоца.
Јасно је да је $a \le 12$ (јер је $13^3 > 2016$).
За $a = 1$ има 18 тражених квадара, јер се на толико начина 2016 може написати као производ bc $(b \le c)$.
За $a = 2$, производ дужина две остале ивице је 1008. Како број $1008 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$ има 30 делитеља, 1008 се може написати на 15 различитих начина као производ два природна броја. Ако искључимо случај $b = 1$ (због $a \le b$), остаје 14 могућности. Дакле, има 14 тражених квадара са ивицом $a = 2$.

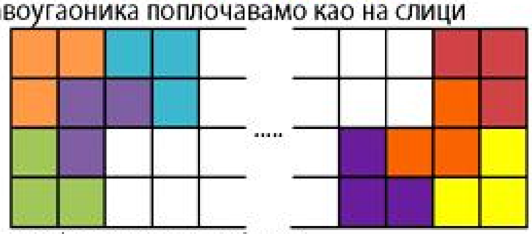
За $a = 3$, производ дужина две остале ивице је $672 = 2^5 \cdot 3 \cdot 7$ и тај број има 24 делитеља. Искључујући случајеве $b = 1$ и $b = 2$, добијамо 10 начина да се број 672 представи у облику bc, где је $3 \leq b \leq c$.
За $a = 4$, производ дужина две остале ивице је $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ и тај број има 24 делитеља. Искључујући случајеве $b = 1$, $b = 2$ и $b = 3$, добијамо 9 начина да се број 504 представи у облику bc, где је $4 \leq b \leq c$.
За $a = 6$, производ дужина две остале ивице је $336 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7$ и тај број има 20 делитеља. Узимајући у обзир да је $b \geq 6$, добијамо 6 начина да се број 336 представи у облику bc, где је $6 \leq b \leq c$.
За $a = 7$, производ дужина две остале ивице је $288 = 2^5 \cdot 3^2$ и тај број има 18 делитеља. Узимајући у обзир да је $b > 6$, добијамо 4 начина да се број 288 представи у облику bc, где је $6 < b \leq c$.
За $a = 8$, производ дужина две остале ивице је $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$ и тај број има 18 делитеља. Узимајући у обзир да је $b \geq 8$, добијамо 3 начина да се број 252 представи у облику bc, где је $8 \leq b \leq c$.
За $a = 9$, производ дужина две остале ивице је $224 = 2^5 \cdot 7$ и тај број има 12 делитеља. Узимајући у обзир да је $b \geq 9$, добијамо само један начин да се број 224 представи у облику bc, где је $9 \leq b \leq c$ $(14 \cdot 16 = 224)$.
За $a = 12$, имамо само једну могућност: $2016 = 12 \cdot 12 \cdot 14$.
Укупан број тражених квадара је $18 + 14 + 10 + 9 + 6 + 4 + 3 + 1 + 1 = 66$.

20. 5. Правоугаоник 24×84 може се саставити од три квадрата 24×24 и два квадрата 12×12.

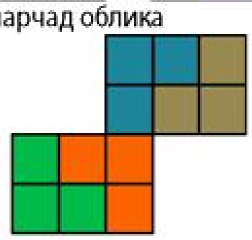
21. 18. Квадар $6 \times 6 \times 56$ може се саставити од 9 коцки $6 \times 6 \times 6$ и 9 коцки $2 \times 2 \times 2$.

22. Доказаћемо да тврђење важи за сваки правоугаоник $4 \times 3k$, $k > 1$.
Доказ. За $k = 2$, поплочавање се може остварити као на слици.

За $k > 2$, крајеве правоугаоника поплочавамо као на слици



а између та два дела умећемо парчад облика



23. Сваки троугао се може разрезати на 3 конвексна четвороугла са једнаким површинама тако што се његово тежиште споји дужима са средиштима страница. (Конвексност та 3 четвороугла следи на основу чињенице да им се дијагонале секу, што се лако доказује посматрањем средњих линија троугла.) С друге стране, сваки троугао се може разрезати на n троуглова једнаких површина на следећи начин: једна страница троугла подели се на n једнаких дужи, а онда се наспрамно теме споји дужима са свим тачкама поделе. Делећи на тај начин дати троугао на n троуглова једнаких површина, а затим сваки од тих n троуглова на 3 конвексна четвороугла једнаких површина, добијамо поделу датог троугла на 3n конвексних четвороуглова једнаких површина. Како је 2016 $= 3 \cdot 672$, следи тврђење.

24. 73322222.

25. Како је $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$, тражени број мора имати бар 4 цифре. Четири цифре чији је производ 2016 могу се изабрати на два начина: 4, 7, 8, 9 и 6, 6, 7, 8. Први избор даје најмањи тражени број 4789.

26. Тражени број мора имати бар 4 цифре. Са цифрама 4, 7, 8, 9 не може се написати тражени број јер њихов збир није дељив са 9. Тражени најмањи број је 6678.

27. У запису броја не може се појавити цифра 0. Не могу се појавити ни више од 3 различите парне цифре, тј. не могу бити заступљене све четири парне цифре различите од 0 (2, 4, 6, 8), јер је њихов производ дељив са 2^7. Уствари, производ парних цифара мора бити дељив са 32, али не и са 64, па није могуће да се појави свака од цифара 4, 6, 8. При томе, ако се појављују 4 и 8, не може ниједна друга парна цифра (јер је $4 \cdot 8 = 32 = 2^5$). Број непарних цифара је највише 3 и то моги бити 1, 3, 7 или 1, 7, 9. Са другом комбинацијом искључена је цифра 6, али онда и цифра 2 (јер је $2 \cdot 4 \cdot 8 = 64$), па тражени број не може имати више од 5 цифара. Са првом комбинацијом цифара можемо добити број 876321 и то је тражени број.

Задаци за самостални рад

1. Нађи највећи десетоцифрени број са производом цифара 2016.
2. Нађи најмањи природан број дељив са 11 и са производом цифара 2016.
3. Колико има природних бројева у чијем се декадном запису не појављује цифра 1, а производ цифара је 2016.
4. Колико има природних бројева са различитим цифрама и са производом цифара 2016?