Конструкције само шестаром (без лењира)

Миодраг Мишић, Крагујевац

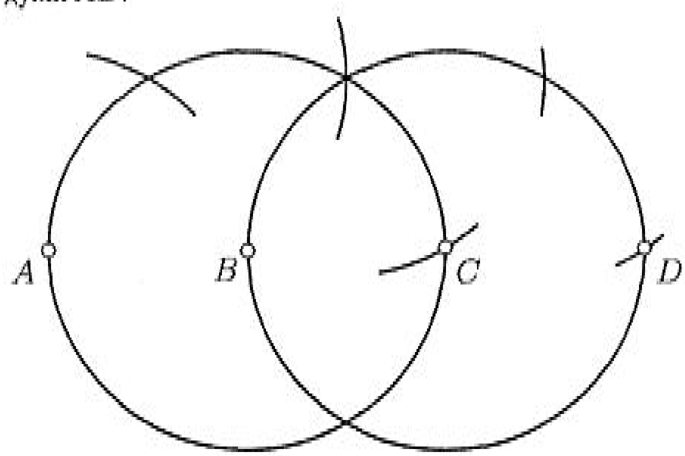
Геометријским конструкцијама математичари су се бавили од давнина. При томе су обично коришћени лењир и шестар[2]. Много је математичара који су се питали да ли се нека конструкција изведена с оба поменута инструмента може добити коришћењем само једним од њих.

Италијански математичар Лоренцо Маскерони (Lorenzo Mascheroni, 1750–1800), у својој књизи Geometria del compasso[3] (Pavia 1797), доказао је: *све геометријске (еуклидске) конструкције које се могу извести лењиром и шестаром могу се извести и само шестаром.*

Двадесетих година прошлог века један дански математичар је пронашао књигу Euclidus Danicus[4] из 1772. године, данског математичара Георга Мора (Georg Mohr, 1640–1697), у којој су дате еуклидске геометријске конструкције изведене само шестаром. Сматра се да Лоренцо Маскерони није знао за ове резултате.

С друге стране, француски математичар Жан Виктор Понселе (Jean Victor Poncelet, 1788–1867), који се бавио пројективном геометријом, доказао је 1822. године да се све конструкције које се могу извести лењиром и шестаром могу извести и само помоћу лењира, ако је у равни цртежа дата фиксирана кружница са својим центром.

Но, вратимо се конструкцијама само шетаром. Ево једне веома једноставне. Помоћу шестара, лако конструишемо дуж која је 2, 3, 4 и уопште n (n је произвољан природан број) пута дужа од дате дужи AB.



Наравно, помоћу шестара не можемо нацртати непрекидну праву линију, већ само можемо конструисати произвољан број тачака које припадају правој. Међутим, како је права одређена са две било које своје тачке, у геометрији шестара конструкција праве линије сматра се завршеном ако су конструисане две њене тачке.

Напомена.[5] Добро је познато да се шестаром на кружници могу одредити темена

[2]Ограничење на лењир и шестар при геометријским конструкцијама потиче још од Еуклида.

[3]Геометрија шестара (круга)

[4]Дански Еуклид

[5]Милан Шипка, Приче о речима, Популарна лингвистика, Прометеј, Нови Сад, 2007

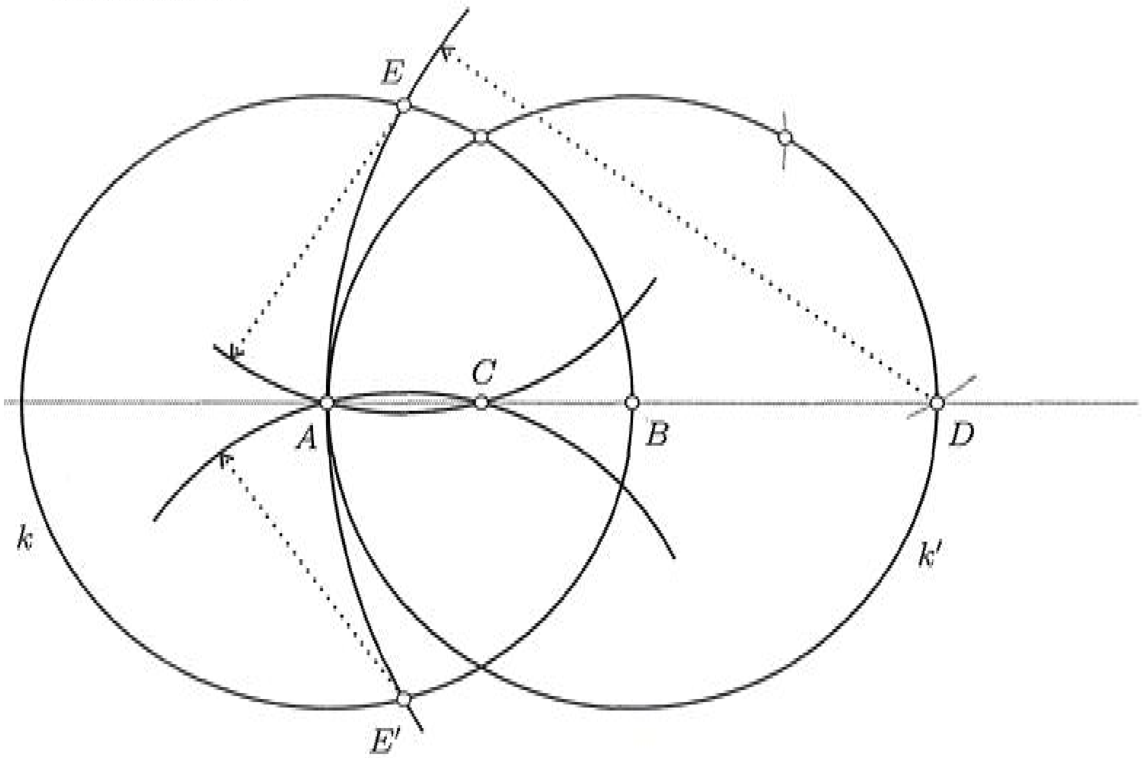
правилног **шест**оугла, то јест да се шестаром кружница може поделити на шест једнаких делова. У вези са овим је порекло речи ***шестар***. Ову реч је створио наш обичан народ, а забележио ју је и Вук Караџић али и пре њега, неких стотину педесет година, још неки састављачи наших речника.

Други назив за шестар је *циркл*. Овај назив потиче из латинског језика, јер су стари Римљани круг називали circulus. Од ове речи је настала реч циркл, коју су усвојили Руси, Немци и многи други народи.

Кроз примере ћемо се упознати са *Геометријом шестара*.

1. Дату дуж AB поделити на два једнака дела.

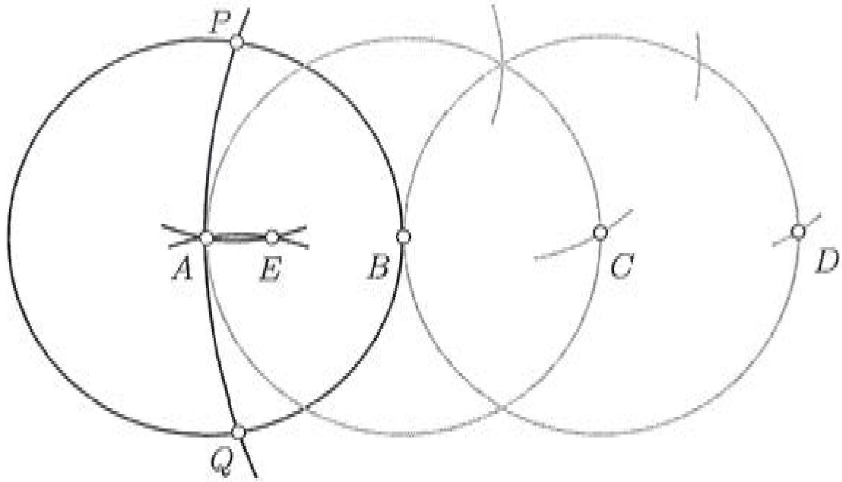
Конструкција.



Најпре конструишемо кружнице k и k' чији су центри редом тачке A и B и полупречници једнаки AB. Затим, на правој AB треба одредити тачку D тако да је $AD = 2AB$. Нека кружница са центром у тачки D и полупречником AD сече кружницу k у тачкама E и E'. Тачка A је тачка пресека кружница полупречника AD чији су центри E и E'. Означимо са C другу пресечну тачку ових кружница. Тачка C је тражена средина дужи AB.

Доказ. Троуглови ACE и ADE су слични, јер су једнакокраки и имају једнак угао на својим основицама: $\sphericalangle EAC \equiv \sphericalangle EAD$. Како је $AE = AB$ и $AD = 2AB$, следи да мора бити и $AB = 2AC$. □

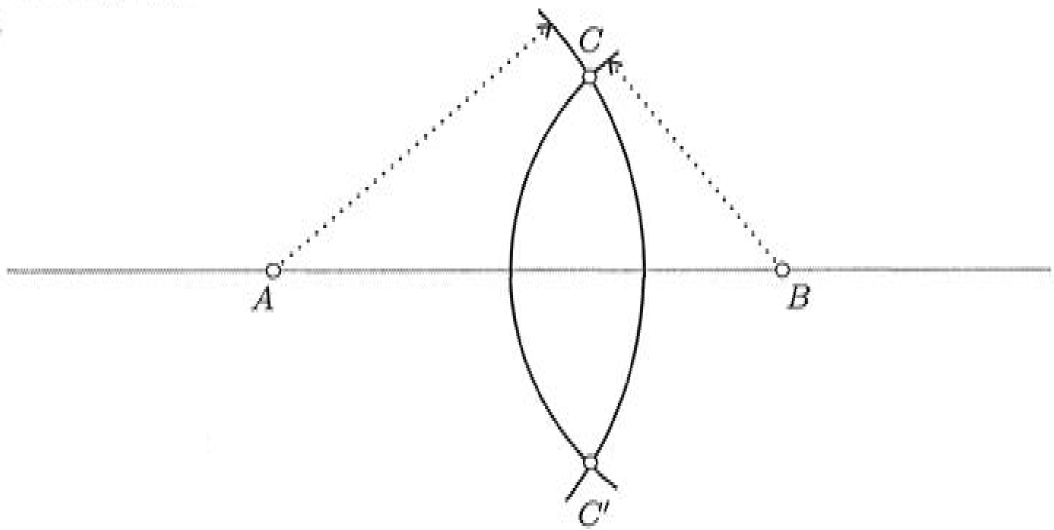
На потпуно аналоган начин, само шестаром конструишемо трећину, четвртину и уопште n-ти део неке задате дужи. На наредној слици је приказана конструкција трећина дате дужи AB. Најпре треба одредити тачку D на правој AB тако да је $AD = 3AB$. Затим конструишемо $k(D, DA)$. Нека је $k(D, DA) \cap k(A, AB) = \{P, Q\}$. Тражена тачка E је пресечна тачка кружница $k(P, PA)$ и $k(Q, QA)$.



Остављамо читаоцима да докажу да конструисана тачка E заиста одређује трећину дужи AB.

2. Одредити тачку C' симетричну датој тачки C у односу на дату праву AB.

Конструкција.

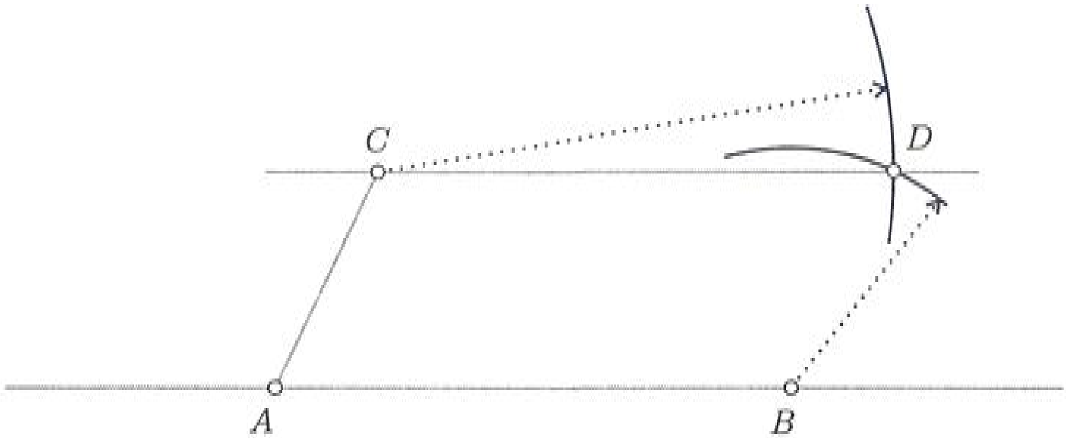


Кроз дату тачку C треба конструисати кружнице са центрима у тачкама A и B. Друга тачка C' пресека тих кружница је тачка симетрична датој тачки C.

3. Кроз дату тачку C конструисати праву паралелну датој правој AB.

Конструкција.

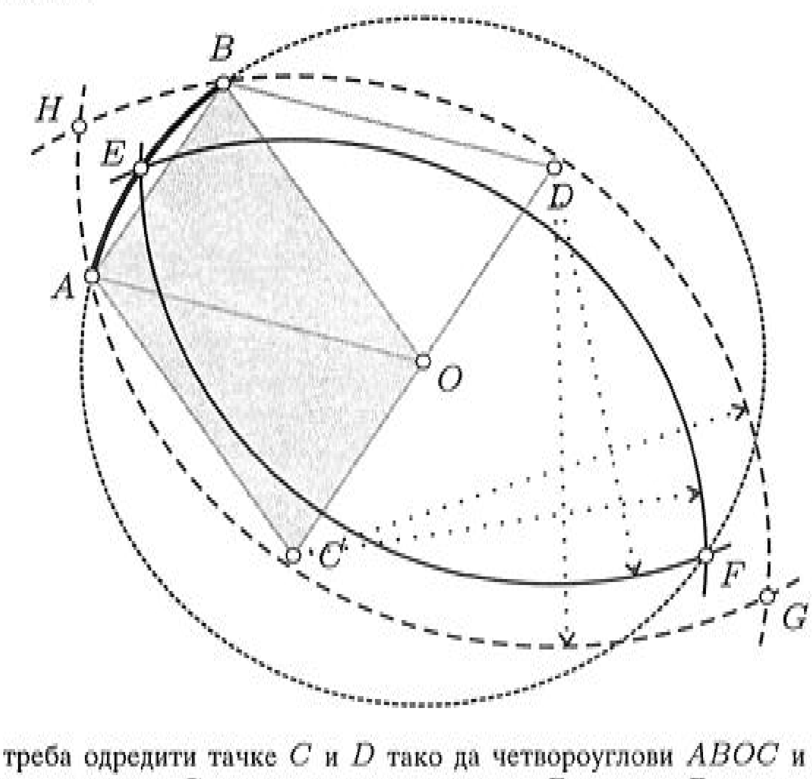
У геометрији шестара, као што смо већ приметили, довољно је одредити бар још једну тачку тражене праве. Нејједноставније је одредити четврто теме (теме наспрам A) паралелограма чије су две суседне странице AB и AC. Наравно, теме (наспрам B) паралелограма чије су странице BA и BC је још једна тачка тражене праве.



Тражена тачка D је, дакле, у пресеку кружница чији су центри редом тачке B и C, а полупречници редом AC, односно AB.

4. Дати кружни лук $\widehat{AB}$ кружнице k полупречника R са центром у тачки O, поделити на два једнака дела.

Конструкција.



Најпре треба одредити тачке C и D тако да четвороуглови $ABOC$ и $BAOD$ буду паралелограми, да тачка C буде теме наспрам темена B, а тачка D теме наспрам темена A у одговарајућим четвороугловима. Затим се конструишу кружнице чији су центри тачке C и D истог полупречника CB, односно DA ($CB = DA$) и одређују се пресечне тачке G и H. Даље треба конструисати кружнице чији су центри тачке C и D истог полупречника HO. Тачке пресека E и F ових кружница су тражне средине мањег и већег лука одређених тачкама A и B кружнице k.

Доказ. Приметимо најпре да су тачке C, O и D као и тачке H, O и G колинеарне и да леже на двема међусобно нормалним правама. Даље, како за (било који па и) паралелограм $ABOC$ важи једнакост[6]: $CB^2 + OA^2 = 2\left(AB^2 + AC^2\right)$ и како је $AC = AO = R$, $OC = AB, CB = CH$ и $OH = CE = d$, следи

$$CB^2 + R^2 = 2\left(AB^2 + R^2\right), \quad \text{тј.} \quad CB^2 = 2 \cdot AB^2 + R^2.$$

Из троугла COH, који је правоугли следи да је

$$d^2 = OH^2 = CH^2 - CO^2 = CB^2 - AB^2,$$

што даје

$$d^2 = CB^2 - AB^2 = 2 \cdot AB^2 + R^2 - AB^2 = AB^2 + R^2.$$

Из троугла COE, који је такође правоугли, следи да је

$$OE^2 = CE^2 - CO^2 = d^2 - AB^2 = AB^2 + R^2 - AB^2 = R^2,$$

тј. $OE = R$ и тиме је доказано да тачка E лежи на луку $\overset{\frown}{AB}$ кружнице k. Лако се доказује да E дели дати лук на два једнака дела. □

5. Одредити тачку пресека дате кружнице $k(O, r)$ и дате праве AB.

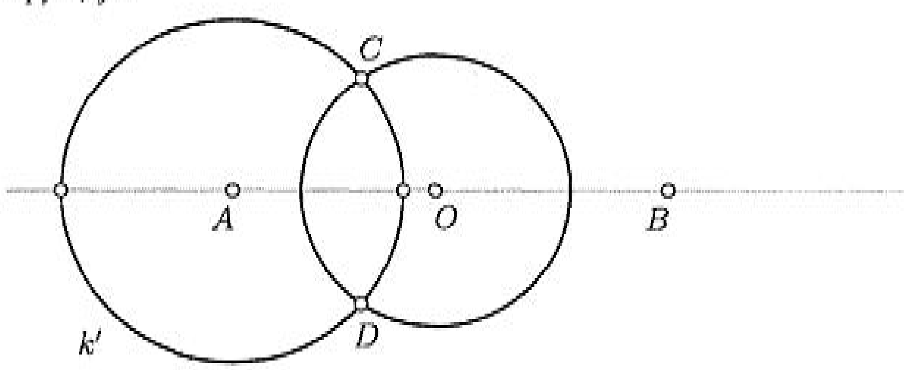
Могућа су два случаја:

5.1. центар кружнице припада датој правој;

5.2. центар кружнице не припада датој правој.

5.1. Нека центар O припада правој AB.

Конструкција.

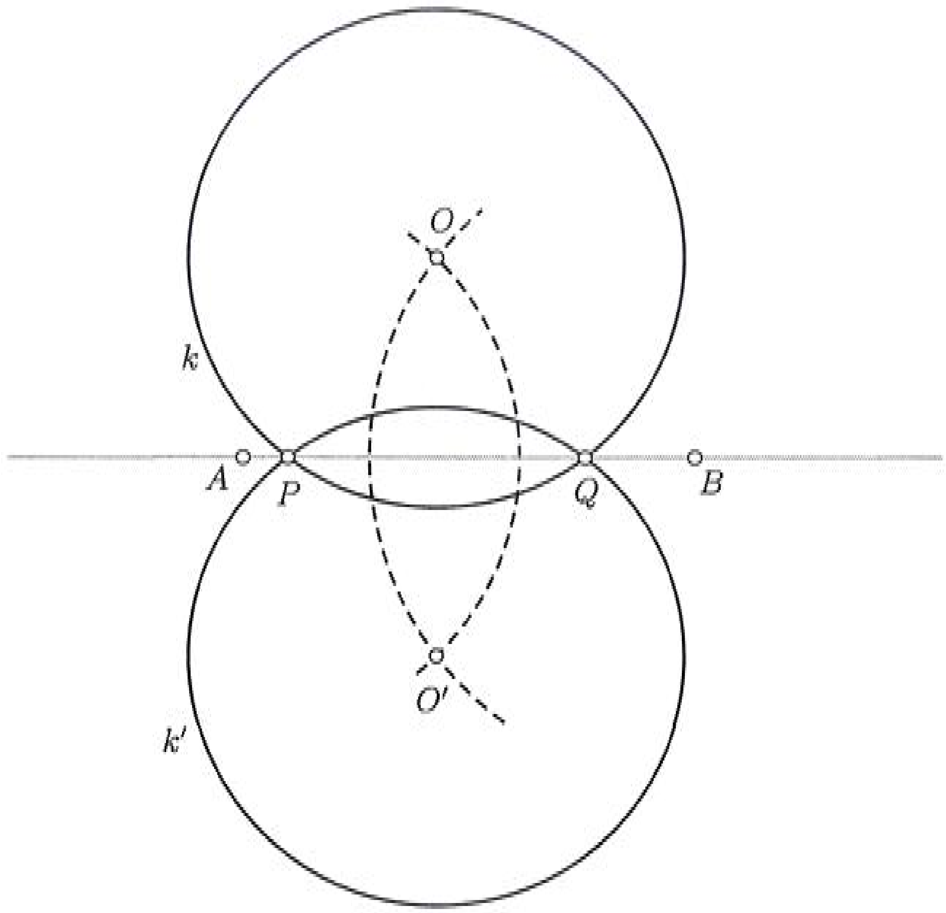


Најпре конструишемо кружницу k' са центром у тачки A произвољног полупречника тако да она сече дату кружницу у двема тачкама, C и D. Тражене тачке су средине лукова кружнице k' одређених тачкама C и D. Дакле, треба применити конструкцију из претходне тачке (4).

[6]Збир квадрата дијагонала једнак је двоструком збиру квадрата страница.

5.2. Нека центар O не припада правој AB.

Конструкција.



Тражене тачке P и Q су у пресеку дате кружнице k и њој, у односу на праву AB, симетричне кружнице k'. Центар O' кружинице k' је у пресеку кружница чији су центри у тачкама A и B, а полупречници редом AO и BO.

6. Конструисати нормалу кроз дату тачку C на дату праву AB.

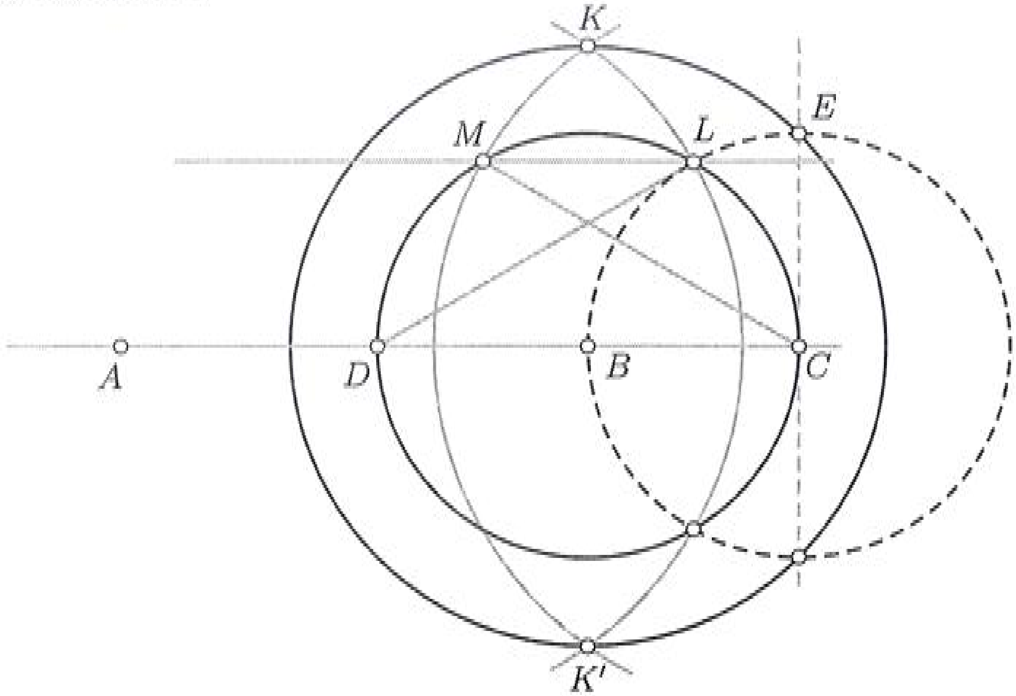
Могућа су два случаја:
6.1. тачка C припада правој AB;
6.2. тачка C не припада правој AB.

6.1. Тачка C припада правој AB.

Конструкција.

На кружници $k(B, BC)$ најпре треба одредити тачке L, M и D, тако да буде $CL = LM = MD = BC$. Ове тачке су пресеци кружница са центрима у тачкама C, L и M полупречника BC и кружнице са центром у тачки B. Дужи MC и DL су једнаке и $MC = DL = BC\sqrt{3}$.

Тада је растојање пресека K, кружница са центрима у тачкама D и C полупречника $BC\sqrt{3}$, од тачке B једнако $BC\sqrt{2}$, тј. једнако је дужини дијагонале квадрата чија је страница BC. Тачка E, тражене нормале, пресек је кружница са центрима у тачкама B и C редом полупречника $BC\sqrt{2}$ односно BC.



6.2. Ако тачка C не припада правој AB, тражена нормала n пролази кроз тачку C' симетричну тачки C у односу на праву AB.

7. Нека су a, b, c дужине трију датих дужи. Конструисати дуж чија је дужина x одређена пропорцијом $a : b = c : x$.

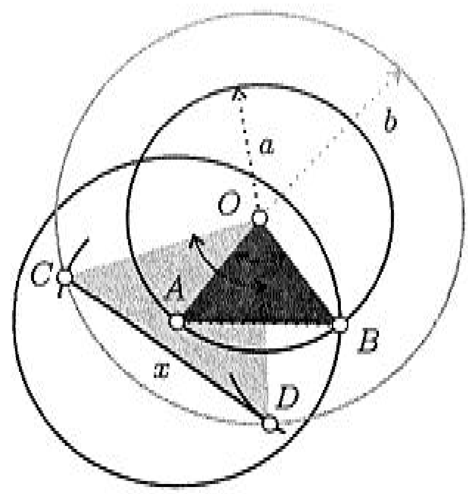
Треба разликовати три случаја:

7.1. $c < 2a$;
7.2. $c \geqslant 2a, b < 2a$;
7.3. $c \geqslant 2a, b \geqslant 2a$.

7.1. $c < 2a$.

Конструкција.

У првом случају, када је $c < 2a$, најпре конструишемо две концентричне кружнице са центром O полупречника $OA = a$ и $OC = b$. Затим, на $k(O, a)$ бирамо произвољну тачку A и конструишемо кружницу $k(A, c)$. Нека је B друга тачка пресека кружница $k(O, a)$ и $k(A, c)$. Најзад, конструишемо кружнице $k(A, d)$ и $k(B, d)$, при чему је $d > |b - a|$. Нека су C и D пресечне тачке ових кружница са кружницом $k(O, b)$ (види слику). Тада је дужина дужи CD једнака x.



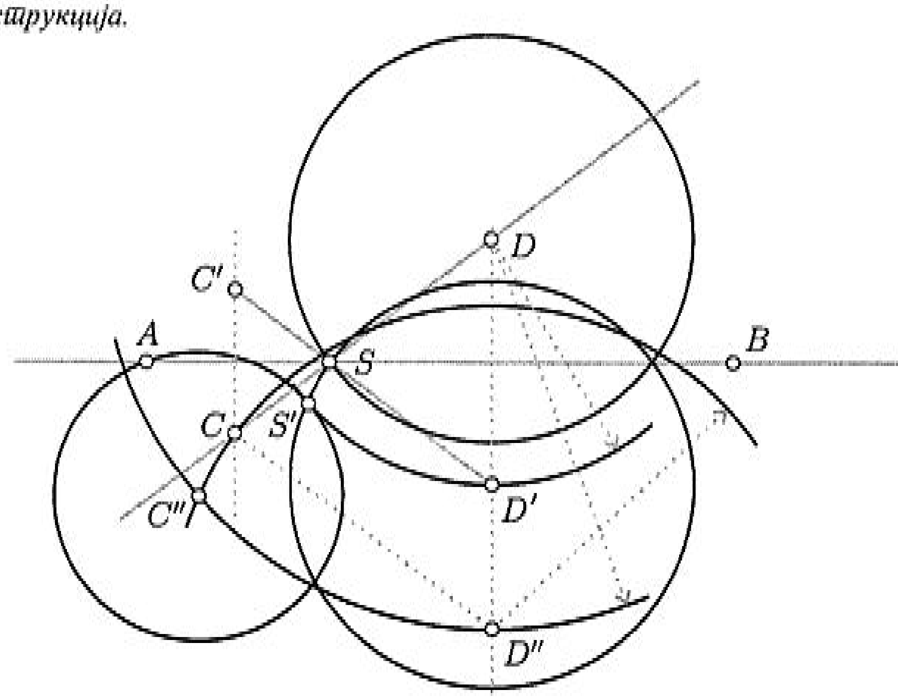
Доказ. Лако се види да су троуглови OAC и OBD подударни, па су стога једнаки углови $\sphericalangle AOC$ и $\sphericalangle BOD$. Одатле следи да су и углови $\sphericalangle AOB$ и $\sphericalangle COD$ једнаки. Како су троуглови AOB и COD једнакокраки, они су слични, па важи пропорција: $OA : AB = OC : CD$, тј. $a : c = b : x$. $\square$

7.2. У другом случају се посматра пропорција $a : c = b : x$ и примењује поступак из случаја 7.1.

7.3. У трећем случају, такође се користи поступак из случаја 7.1, тј. конструише се дуж дужине y тако да је $(na) : b = c : y$, при чему је n природан број такав да је $c < 2na$. Затим се примењује исти поступак да би се конструисала дуж дужине $x = ny$.

8. Одредити пресек S две дате праве AB и CD.

Конструкција.



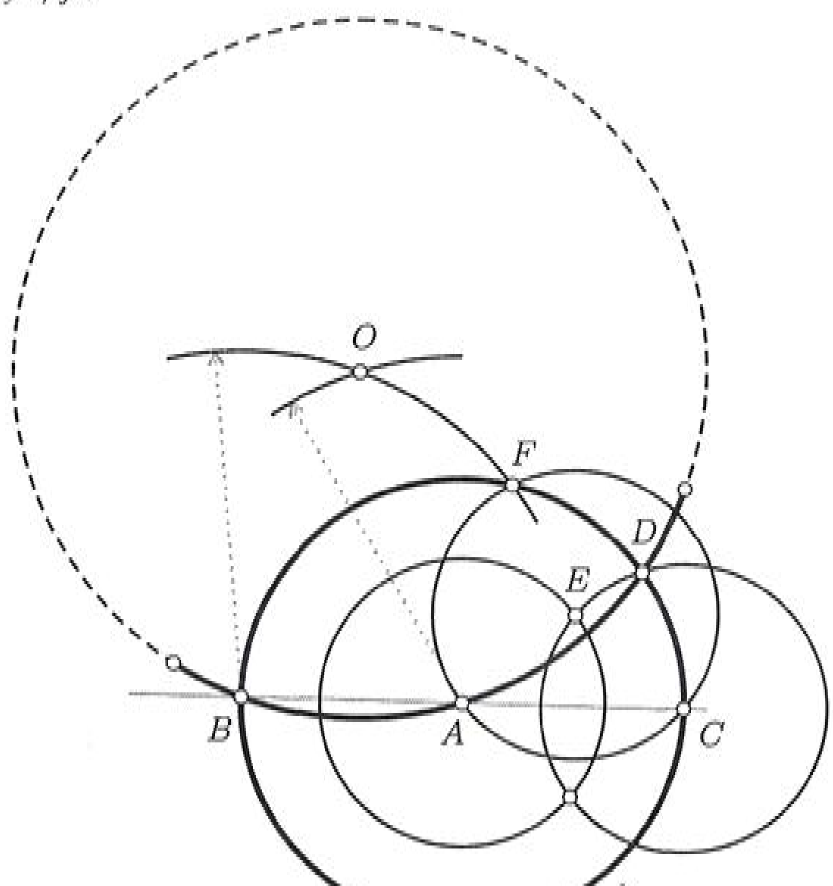
Најпре конструишемо тачке C' и D' симетричне редом тачкама C и D у односу на праву AB (конструкција 2). Нека је D'' теме паралелограма над дужима $C'C$ и $C'D$ које је наспрам C'. Тада су тачке D, D' и D'' колинеарне.

Приметимо да тачка S, коју треба конструисати, припада правој $C'D'$ као и да су троуглови DSD' и DCD'' слични. Из сличности следи пропорција $DD' : DD'' = D'S : D''C$. Применом поступка из претходне тачке (7), можемо конструисати дуж чија је дужина $D'S$.

Нека је C'' једна од пресечних тачака кружница $k(D, DD'')$ и $k(D'', D''C)$. Даље, нека је S' тачка додира кружница $k(D, DD')$ и $k(C'', D'D'')$. Тада важи пропорција $DD' : DD'' = D'S' : D''C''$. Како је $D''C'' = D''C$, из уочених пропорција следи да је $D'S' = DS$, Дакле, тражена тачка S је одговарајућа пресечна тачка кружница $k(D', D'S')$ и $k(D, D'S')$.

9. Одредити центар O кружнице, ако је дат неки њен лук ℓ.

Конструкција.



Нека је A произвољна тачка датог лука ℓ и нека су B и D пресечне тачке лука ℓ и кружнице k са центром у тачки A произвољног полупречника. На кружници k одредимо тачку C дијаметрално супротну тачки B. Нека је E тачка пресека кружница $k(A, CD)$ и $k(C, CD)$ која се налази унутар кружнице k. Даље, нека је F пресечна тачка кружница $k(E, CD)$ и k. Дуж BF је полупречник кружнице која садржи дати лук ℓ. Центар O ове кружнице је пресек двеју кружница полупречника BF чији су центри у тачкама B и A.

Доказ. Приметимо најпре да су једнакокраки троуглови ACE и AEF подударни, јер су им одговарајуће странице једнаке. Тада важи и следећа једнакост углова: $\sphericalangle EAF = \sphericalangle ACE$. Из ове једнакости се једноставно добија и да је $\sphericalangle BAF = \sphericalangle AEC$. Једнакокраки троуглови ABF и ACE су слични, па стога важи пропорција:

$$BF : AB = AC : CE, \quad \text{или} \quad BO : AB = AC : CD.$$

Из ове пропорције следи да су и једнакокраки троуглови ABO и ACD слични, па важи

$$\sphericalangle BAO = \sphericalangle ACD = \frac{1}{2}\sphericalangle BAD = \sphericalangle DAO.$$

Одавде даље следе једнкости:

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle ADC + \sphericalangle ACD = 2\sphericalangle ACD = 2\sphericalangle BAO.$$

а пошто је $\sphericalangle BAO = \sphericalangle DAO$, следи да су троуглови ABO и ADO подударни. Зато је $BO = AO = DO$, па је тачка O центар тражене кружнице. □

* * *

Задаци

1. Дата је права AB. Наћи тачку C, тако да права AC буде нормална на AB.
2. Дата је права AB и дуж d. Конструисати праву паралелну са AB тако да растојање између ових правих буде једнако d.
3. Решите следећи Наполеонов задатак. Наиме, Наполеон Бонапарта је француским математичарима поставио проблем да поделе дату кружницу на четири једнака дела само шестаром.

* * *

Литература

[1] Matematička čitanka, u redakciji prof. Milenka Sevdića, Mascheronijeve konstrukcije u vezi sa pravilnim mnogouglovima, Zagreb, 1947.

[2] Florian Cajori, *A History of Mathematics*, Chelsea Publishing Company, New York, 1985.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2008/09 година