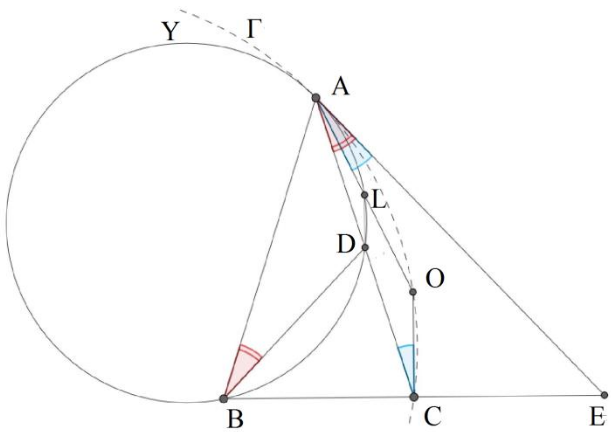
БМО 2020

1. Даден е остроаголен триаголник ABC таков што $\overline{AB} = \overline{AC}$. Точката D е средина на страната AC, а Y е опишаната кружница околу триаголникот ABD. Тангентата на кружницата Y во точката A ја сече страната BC во точката E. Нека O е центарот на опишаната кружница на триаголникот ABE. Докажи дека средината на отсечката AO припаѓа на кружницата Y.

   Решение. *Прв начин*. Прво ќе докажеме дека точката C е средина на отсечката BE. Имаме:

   $$\measuredangle BCD = \measuredangle ACB = \measuredangle CBA = \measuredangle EBA \text{ и}$$
   $$\measuredangle BDC = \measuredangle BAD + \measuredangle DBA = \measuredangle BAD + \measuredangle DAE = \measuredangle BAE,$$

   па затоа $\triangle ABE \sim \triangle DCB$. Според тоа, $\frac{\overline{BE}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = 2$, т.е. точката C е средина на отсечката BE.



   Сега ќе докажеме дека AE е тангента на кружницата ACO. Имаме:

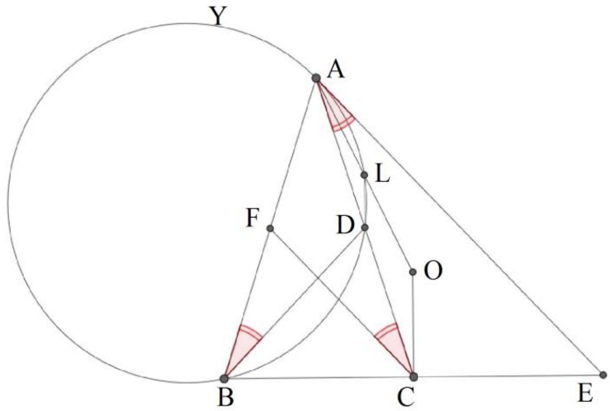
   $$\measuredangle OAE = 90^\circ - \measuredangle EBA \text{ и } \measuredangle OCA = \measuredangle OCB - \measuredangle ACB = 90^\circ - \measuredangle CBA = 90^\circ - \measuredangle EBA,$$

   па затоа $\measuredangle OAE = \measuredangle OCA$, што значи дека AE се совпаѓа со тангентата во точката A на кружницата ACO.

   Конечно, нека Γ е сликата на Y при хомотетија со центар во A и коефициент 2. Тогаш Γ исто така се допира до AE во точката A и минува низ C, па така Γ се совпаѓа со кружницата која минува низ точката O, т.е. со кружницата ACO. Така, Y минува низ средината на отсечката AO.

   Втор начин. Како и при првиот начин на решавање прво докажуваме дека C е средина на отсечката BE. Нека точката F е средина на отсечката AB. Од $\measuredangle EAC = \measuredangle ABD = \measuredangle FCD$, следува $CF \parallel AE$. Последното значи дека CF е средна линија на $\triangle BAE$, па така C е средина на отсечката BE.

   Нека L е средина на отсечката AO. Бидејќи LD е средна линија на $\triangle AOC$, заклучуваме дека $LD \parallel OC$, што значи дека $\measuredangle ALD = \measuredangle AOC$. Сега, од

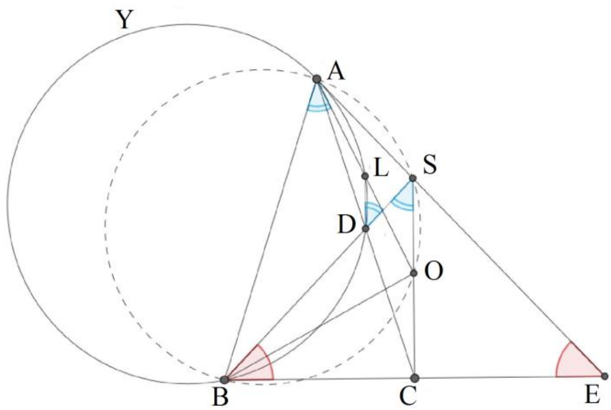


$$\measuredangle ALD = \measuredangle AOC = \measuredangle BOC + \measuredangle AOB = \measuredangle BAE + 2\measuredangle BEA,$$
$$\measuredangle ABD = \measuredangle CEA = \measuredangle BCA - \measuredangle BEA = \measuredangle ABE - \measuredangle BEA,$$
$$\measuredangle ALD + \measuredangle ABD = \measuredangle BAE + 2\measuredangle BEA + \measuredangle ABE - \measuredangle BEA = 180^\circ,$$

следува дека четириагоникот $ABDL$ е тетивен, т.е. L припаѓа на Y.

Трет начин. Како и во претходните начини на решавање прво се докажува дека точката C е средина на отсечката BE.

Нека правите AE и AD се сечат во точката S. Ќе докажеме дека S припаѓа на правата CO. Бидејќи

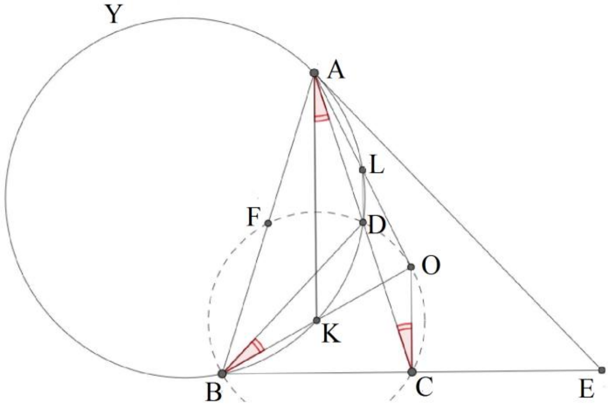


$$\measuredangle BDC = \measuredangle BAD + \measuredangle DBA = \measuredangle BAD + \measuredangle DAE = \measuredangle BAE$$

(исто како и во првиот начин на решавање), добиваме дека $\triangle SBE$ е рамнокрак, па така CO како симетрала на основата BE минува низ врвот S.

Од $\measuredangle BOC = \measuredangle BAS$ следува дека четириаголникот $ASOB$ е тетивен, па затоа $\measuredangle BAL = \measuredangle BSO$. Со L да ја означиме пресечната точка на AO и Y. Тогаш $\measuredangle LDS = \measuredangle BAL$, што заедно со претходното равенство дава $\measuredangle BSO = \measuredangle LDS$, па затоа $LD \parallel SO$. Последното значи дека LD е средна линија на $\triangle AOC$, што значи дека точката L која припаѓа на Y е средина на отсечката AO.

Четврт начин. Како и претходно прво докажуваме дека точката C е средина на отсечката BE. Нека точката F е средина на отсечката AB. Тогаш точките F и C лежат на кружница со дијаметар BO. Бидејќи четириаголникот $BFDC$ е тетивен, заклучуваме дека D исто така припаѓа на оваа кружница.



Нека K е средина на BO. Тогаш AK е симетрала на отсечката BC, па затоа $OC \parallel AK$, што значи $\measuredangle KAD = \measuredangle DCO$. Освен тоа, $\measuredangle DCO = \measuredangle KBD$, бидејќи четириаголникот $DBCO$ е тетивен. Од последните две равенства следува $\measuredangle KAD = \measuredangle KBD$, па така K припаѓа на Y. Понатаму, AK е симетрала на $\measuredangle BAD$, што значи дека K е средина на лакот BD.
Сега да разгледаме осна симетрија со оска на симетрија правата OF. Јасно, B се пресликува на A. Бидејќи OF е симетрала на AB, при оваа симетрија кружницата Y се пресликува во самата себе. Така, пресечната точка K меѓу OB и Y се пресликува во точката L која е пресечна точка меѓу OA и Y. Но, K е средина на отсечката BO, па затоа L е средина на отсечката OA.

2. Определи ги сите функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такви што за секој природен број n важи:

1) $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ е квадрат на природен број и

2) n^3 е делив со $f(n)$.

Решение. *Прв начин*. Со индукција ќе докажеме дека $f(n)=n^3$ за секој природен број n. Лесно се проверува дека оваа функција ги задоволува условите на задачата.
Јасно, тврдењето важи за $n=1$. Нека $n\geq 2$ и да претпоставиме дека $f(m)=m^3$ за секој природен број $m<n$. Тогаш $\sum_{k=1}^{n-1} f(k)=\frac{n^2(n-1)^2}{4}$, па затоа од

1) следува

$$f(n)=\sum_{k=1}^{n} f(k)-\sum_{k=1}^{n-1} f(k)=(\tfrac{n(n-1)}{2}+k)^2-\tfrac{n^2(n-1)^2}{4}=k(n^2-n+k),$$

за некој природен број k. Понатаму, од $f(n)\,|\,n^3$ следува $k(n^2-n+k)\le n^3$, што е еквивалентно со $(n-k)(n^2+k)\ge 0$, што значи $k\le n$. Од друга страна, n^2-n+k е делител на n^3. Затоа, ако $k<n$, тогаш

$$n<\tfrac{n^3}{n^2-1}\le\tfrac{n^3}{n^2-n+k}\le\tfrac{n^3}{n^2-n+1}<\tfrac{n^3+1}{n^2-n+1}=n+1,$$

па затоа $\frac{n^3}{n^2-n+k}$ не може да биде природен број. Последното значи дека $k=n$ и така $f(n)=n^3$. Со тоа е комплетирана индукцијата, па затоа единствена функција која ги задоволува условите на задачата е $f(n)=n^3$, $n\in\mathbb{N}$.

Втор начин. Нека $F(n)=f(1)+f(2)+...+f(n)$. Ќе докажеме три леми.

Лема 1. $F(n)\le\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Доказ. Од $f(i)\,|\,i^3$ за $i=1,2,...,n$ следува $f(i)\le i^3$, па затоа

$$F(n)=f(1)+f(2)+...+f(n)\le 1^3+2^3+...+n^3=\tfrac{n^2(n+1)^2}{4}.\ \blacksquare$$

Лема 2. $F(n)\ge n^2$.

Доказ. Од $f(i)>0$, за секој i следува дека $F(n)$ е инјекција и монотоно расте. Според 1) $F(n)$ е точен квадрат, па затоа $F(n)\ge n^2$ за секој n. $\blacksquare$

Лема 3. $f(p)=p^3$ за секој прост број p.

Доказ. Од $f(p)\,|\,p^3$ следува дека можни вредности на $f(p)$ се $1,p,p^2$ и p^3. Ќе докажеме дека $f(p)$ не може да биде 1 или p или p^2.

Случај 1. Нека $f(p)=1$. Тогаш $F(p)=F(p-1)+1$ и $F(p-1)$ и $F(p)$ се природни броеви поголеми од 1 кои се точни квадрати, што е противречност.

Случај 2. Нека $f(p)=p$. Нека $F(p-1)=b^2$ и $F(p)=a^2$. Затоа,

$$p=F(p)-F(p-1)=(a-b)(a+b),$$

од каде добиваме $a-b=1, a+b=p$, односно $a=\frac{p+1}{2}$ и $b=\frac{p-1}{2}$. Сега, според лема 2 важи

$$(\tfrac{p-1}{2})^2=b^2=F(p-1)\ge(p-1)^2,$$

што е противречност.

Случај 3. Нека $f(p)=p$. Нека $F(p-1)=b^2$ и $F(p)=a^2$. Затоа,

$$p^2=F(p)-F(p-1)=(a-b)(a+b),$$

па како $a,b>0$ од последното равенство следува

$$a-b=1, a+b=p^2 \text{, т.е. } a=\frac{p^2+1}{2} \text{ и } b=\frac{p^2-1}{2}.$$

Но според лема 1 важи

$$(\frac{p^2-1}{2})^2=b^2=F(p-1)\geq(\frac{p(p-1)}{2})^2=(\frac{p^2-p}{2})^2,$$

што е противречност. ■

За да го комплетираме доказот дека $f(n)=n^3$ за секој природен број n, треба да докажеме дека $f(n)=n^3$ за секој сложен број n. Нека $p>n$ е прост број. Докажавме дека $f(p)=p^3$ и по услов $f(p)=F(p)-F(p-1)=(a-b)(a+b)$. Со аналогни размислувања како во горните разгледувања се докажува дека случајот $a-b=1$ и $a+b=p^3$ не е можен, па затоа важи $a-b=p$ и $a+b=p^2$.

Оттука добиваме $b=\frac{p^2-p}{2}$, па така

$$F(p-1)=f(1)+f(2)+...+f(p-1)=(\frac{p^2-p}{2})^2=\frac{p^2(p-1)^2}{4},$$

што значи дека во лема 1 важи знак за равенство. Сега, бидејќи функцијата F строго монотоно расте, последното е можно само ако $f(i)=i^3$ за секој $i\leq p-1$, со што доказот е комплетиран.

3. Даден е природен број k. Определи го најмалиот природен број $n\geq k+1$ за кој во следнава игра може да се одиграат бесконечно многу потези.

   Дадени се n кутии означени со $b_1,b_2,...,b_n$, при што за секој i кутијата b_i на почетокот содржи точно i монети. Во секој потез редоследно ги реализираме следниве три чекори:

   1) Се избираат $k+1$ кутии.
   2) Од овие $k+1$ кутии се избира една, да кажеме b_i. Во оваа кутија се додаваат i монети, а од секоја од преостанатите k кутии се отстранува најмалку половина од монетите.
   3) Ако некоја кутија се испразни, играта завршува. Во спротивно се преминува на следниот чекор.

Решение. Бараниот минимум е $n=2^k+k-1$.

Во овој случај може да се одиграат бесконечно многу потези ако во секој чекор се избираат последните $k+1$ кутии $b_{2^k-1},b_{2^k},...,b_{2^k+k-1}$. Така, ако во чекорот r кутијата b_{2^k+i-1} има точно m_i монети, тогаш од неа се отстрануваат точно $\lceil m_i/2\rceil$ монети, освен во случајот $i\equiv r-1(\bmod k+1)$, кога во кутијата се додаваат 2^k+i-1 монети. Така по чекорот r кутијата b_{2^k+i-1} содржи точно

$\lfloor m_i/2 \rfloor$ монети, освен ако $i \equiv r-1 (\bmod k+1)$, во кој случај таа содржи $m_i + 2^k + i - 1$ монети. Значи, играта ќе продолжи неограничено, бидејќи секогаш кога кутија се дополнува се додаваат најмалку $2^k - 1$ монети, па така кутијата ќе содржи најмалку 2^k монети, што е доволно да се реализираат следните k чекори.

Нека $n \le 2^k + k - 2$ и да претпоставиме дека во играта може да се реализираат бесконечно многу потези. Да забележиме дека од кутија која содржи m монети може најмногу $w = \lfloor \log_2 m \rfloor$ пати да се извадат монети и бројот w ќе го наречеме *тежина* на оваа кутија. Збирот од тежините на сите кутии ќе го наречеме *вкупна тежина*. Сега ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. Реализирањето на произволен чекор не ја зголемува вкупната тежина. Освен тоа, дополнувањето на било која од првите $2^k - 2$ кутии строго ја намалува вкупната тежина.

Доказ. Бидејќи вадењето на монети од секоја кутија ја намалува нејзината тежина за најмалку 1, доволно е да докажеме дека дополнувањето на било која кутија ја зголемува нејзината тежина за најмногу k, и ако тоа се прави со некоја од првите $2^k - 2$ кутии, тогаш нејзината тежина се зголемува за најмногу $k-1$. Нека кутијата која ја пополнуваме е b_i и нека во моментот таа содржи точно m_i монети. Ќе разгледаме неколку случаи.

Ако $m_i = 1$, тогаш тежината се зголемува за

$$\lfloor \log_2(i+1) \rfloor \le \left\lfloor \log_2(2^k + k - 1) \right\rfloor \le \left\lfloor \log_2(2^{k+1} - 2) \right\rfloor \le k,$$

и ако додадеме $i \le 2^k - 2$ монети, тогаш тежината се зголемува за

$$\lfloor \log_2(i+1) \rfloor \le \left\lfloor \log_2(2^k - 1) \right\rfloor = k - 1.$$

Ако $m_i = 2$, тогаш тежината се зголемува за

$$\lfloor \log_2(i+2) \rfloor - \lfloor \log_2 2 \rfloor \le \left\lfloor \log_2(2^k + k) \right\rfloor - 1 \le k - 1.$$

Ако $m_i \ge 3$, тогаш тежината се зголемува за

$$\begin{aligned}\lfloor \log_2(i+m_i) \rfloor - \lfloor \log_2 m_i \rfloor &\le \lfloor \log_2(i+m_i) - \log_2 m_i \rfloor + 1 \\ &\le \left\lfloor \log_2\left(1 + \tfrac{2^k + k - 2}{3}\right) \right\rfloor + 1 \le k,\end{aligned}$$

бидејќи $1 + \frac{2^k + k - 2}{3} = \frac{2^k + k + 1}{3} < \frac{2^k + 2^{k+1}}{3} = 2^k$.

Конечно, ако $i \le 2^k - 2$ тогаш ги разгледуваме подслучаите $m_i = 3$ и $m_i \ge 4$. Во останатите подслучаи тежината се зголемува за

$$\lfloor \log_2(i+3) \rfloor - \lfloor \log_2 3 \rfloor \le \left\lfloor \log_2(2^k+1) \right\rfloor - 1 \le k-1,$$

а во последниот за

$$\begin{aligned}\lfloor \log_2(i+m_i) \rfloor - \lfloor \log_2 m_i \rfloor &\le \lfloor \log_2(i+m_i) - \log_2 m_i \rfloor + 1\\ &\le \left\lfloor \log_2(1+\tfrac{2^k-2}{4}) \right\rfloor + 1 \le k-1,\end{aligned}$$

бидејќи $1+\frac{2^k-2}{4} = \frac{2^k+2}{4} < 2^{k-2}+1$. ■

Да се вратиме на задачата. Бидејќи вкупната тежина не може да опаѓа бесконечно многу пати, $n > 2^k - 2$ и од некој момент ниту една од првите $2^k - 2$ кутии не е дополнета. Понатаму, секој чекор вклучува избор на $k+1$ кутија. Бидејќи $n \le 2^k + k - 2$, од овој момент во секој чекор имаме одземање монети од најмалку една од првите $2^k - 2$ кутии. Ова не е можно да се направи бесконечно многу пати, што противречи на претпоставиме дека во играта може да се реализираат бесконечно многу потези

Конечно, во оваа игра може да се направат бесконечно многу чекори ако и само ако $n \ge 2^k + k - 1$.

4. Нека $a_1 = 2$. За секој природен број n, нека a_{n+1} е најмалиот природен број поголем од a_n чиј број на делители е поголем од бројот на делителите на a_n. Докажи дека само за конечно многу природни броеви n важи $2a_{n+1} = 3a_n$.

Решение. Прво ќе ја докажеме следнава лема.

Лема 1. Секој a_n е најмалиот природен број меѓу сите природни броеви кои имаат еднаков број позитивни делители како и a_n.

Доказ. Да претпоставиме дека постои n таков што некој природен број $b < a_n$ има еднаков број позитивни делители како и a_n. Тогаш $a_m < b \le a_{m+1}$ за некој $m < n$ и од дефиницијата на низата следува дека $b = a_{m+1}$. Бидејќи $b < a_n$, добиваме дека $m+1 < n$, што е противречност, бидејќи a_{m+1} треба да има помалку позитивни делители од a_n. ■

Нека $p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots$ е низата прости броеви запишани во строго растечки редослед и каноничната репрезентација на природниот број N да ја запишеме во облик $N = \prod_{i \ge 1} p_i^{e_i}$, каде $e_i \ge 0$ за секој i и $e_i = 0$ освен за конечно многу индекси i. Во оваа ознака бројот на позитивните делители на бројот N можеме да го запишеме во обликот $\tau(N) = \prod_{i \ge 1}(e_i + 1)$.

Ќе ја докажеме следнава лема.

Лема 2. Експонентите во каноничната репрезентација на секој член на низата a_n формираат не строго опаѓачка низа.

Доказ. Навистина ако во каноничното претставување на a_n важи $e_i < e_j$ за некој $i < j$, тогаш ако во каноничното претставување на a_n ги замениме само местата на овие две експоненти се добива помал природен број кој има еднаков број позитивни делители како и a_n, што противречи на Лема 1. ■

Да се вратиме на задачата. Членот на низата a_n за кој важи $2a_{n+1} = 3a_n$ ќе го наречеме *убав член* на низата.

Нека претпоставиме дека низата има бесконечно многу убави членови, кои формираат строго растечка бесконечна подниза од низата $\{a_n\}$. За да добиеме противречност доволно е да докажеме дека:

1) Експонентите на простите броеви во каноничните претставувања на убавите членови имаат заедничка горна граница e, и
2) За сите доволно големи прости броеви p ниту еден убав член на низата не е делив со p.

Користејќи ја Лема 2 можеме да запишеме $a_n = \prod_{i \geq 1} p_i^{e_i(n)}$, каде $e_i(n) \geq e_{i+1}(n)$ за секој i.

Тврдењето 2) е директна последица од тврдењето 1) и Лема 1. Нека претпоставиме дека некој убав член на низата a_n е делив со прост број $p_i > 2^{e+1}$, каде e е заедничката горна граница од тврдењето 1). Тогаш $e \geq e_i(n) > 0$, па затоа $2^{e_1(n)e_i(n)+e_i(n)} a_n / p_i^{e_i(n)}$ е природен број кој има еднаков број позитивни делители како и a_n, но е помал од a_n. Последното противречи на Лема 1. Според тоа, не постои убав член на низата кој е делив со прост број поголем од 2^{e+1}.

За да го докажеме 1), доволно е да докажеме дека во множеството убави членови на низата експонентот $e_1(n)$ е ограничен од горе. Тогаш од Лема 2 ќе следува тврдењето 1).

Нека a_n доволно голем убав член. Условот $\tau(a_n) < \tau(a_{n+1})$ е еквивалентен со

$$(e_1(n)+1)(e_2(n)+1) < e_1(n)(e_2(n)+2),$$

односно со условот $e_2(n)+2 \leq e_1(n)$. Последното значи дека a_n е делив со 8, бидејќи или $e_1(n) \geq 3$ или a_n е доволно голем степен на бројот 2.

Понатаму, $\frac{9a_n}{8}$ е природен број кој се наоѓа строго меѓу a_n и a_{n+1}, па затоа $\tau(\frac{9a_n}{8}) \leq \tau(a_n)$, што е еквивалентно на

$$(e_1(n)-2)(e_2(n)+3) \leq (e_1(n)+1)(e_2(n)+1),$$

односно на $2e_1(n) \le 3e_2(n)+7$. Ова покажува дека a_n е делив со 3, бидејќи во спротивно, ако земеме a_n да се менува во множеството убави членови, тогаш 3 ќе биде горна граница за сите освен конечно многу $e_1(n)$, па убавите членови ќе формираат ограничена низа.

Така $\frac{4a_n}{3}$ е друг природен број кој се наоѓа строго меѓу a_n и a_{n+1}, па затоа $\tau(\frac{4a_n}{3}) \le \tau(a_n)$, што е еквивалентно на

$$(e_1(n)+3)e_2(n) \le (e_1(n)+1)(e_2(n)+1),$$

односно на $2e_2(n)-1 \le e_1(n)$. Комбинирајќи го ова неравенство со неравенството од претходниот параграф добиваме

$$4e_2(n)-2 \le 2e_1(n) \le 3e_2(n)+7,$$

односно $e_2(n) \le 9$. Конечно, $2e_1(n) \le 3e_2(n)+7 \le 34$, односно $e_1(n) \le 17$. Тоа значи дека $e_1 \le 17$, со што е докажано тврдењето 1).