Даниел Велинов,
Скопје

МАТЕМАТИЧКА ИНДУКЦИЈА ВО КОМБИНАТОРИКА

Математичката индукција е метод кој се користи за докажување на тврдења кои се однесуваат исклучиво на природните броеви. Постои обоштување на математичката индукција кое е на преброиво множество. Ние овде ќе се задржиме на множеството на природни броеви. Како начин на докажување таа се изведува во два чекори. Првиот чекор, кој е познат како базичен чекор, е да се покаже точност на тврдењето за првиот природен број за кое тоа важи. Вториот чекор, познат како индуктивен чекор, е од претпоставката дека тврдењето важи за првите k броеви, да добиеме точност на тврдењето за $k+1$-от број. Во продолжение, ќе дадеме неколку примери од комбинаторика кои можат да се решат со помош на принципот на математичка индукција.

1. (China, 1994) Во n кутии $(n \geq 4)$ има најмалку 4 чоколатца. Секој пат на Дебелко му е дозволено да избере две непразни кутии, да земе по едно чоколатце од секој од двете кутии и да ги стави тие чоколатца во трета кутија. Дали е секогаш можно сите чоколатца Дебелко да ги стави во една кутија?

Решение. Одговорот е да. Секогасш е можно сите чоколатца да се стават во една кутија. Ова тврдење ќе го докажеме со индукција по m, каде m е бројот на чоколатца. За случајот $m=4$, има најмногу четири непразни кутии. Кутиите кои се празни не ги разгледуваме. Можни се четири почетни дистрибуции на чоколатцата во кутиите: $(1,1,1,1)$, $(1,2,1,0)$, $(2,2,0,0)$, $(1,3,0,0)$. Тогаш,

$$(1,1,1,1) \to (3,1,0,0) \to (2,0,2,0) \to (1,0,1,2) \to (0,0,0,4).$$

Јасно е дека сите други почетни дистрибуции можат да се опфатат со горната постака за дистрибуцијата $(1,1,1,1)$. Па, доказот за $m=4$ е готов. Сега претпоставуваме дека тврдењето е точно за првите $m \geq 4$ броеви. Ако имаме $m+1$ чоколатца, избираме едно од нив и го нарекуваме специјално чоколатце. Најпрвин го игнорираме специјалното чоколатце и ги разгледуваме останатите m чоколатца. Од индуктивната претпоставка, ние можеме да ги сместиме m-те чоколатца во една кутија. Ако кутијата го содржи специјалното чоколатце тогаш доказот е завршен. Ако не, избираме две празни кутии и продолжуваме на следниот начин:

$$(1,m,0,0) \to (0,m-1,2,0) \to (0,m-2,1,2) \to (2,m-3,0,2) \to$$
$$\to (1,m-1,0,1) \to (0,m+1,0,0)$$

од каде според принципот на математичка индукција добиваме дека тврдењето важи за секој природен број $m \geq 4$.

2. Одреди дали е можно броевите $1,2,3,...,1000$ да се распоредат во редица, така што аритметичката средина на било кои различни два броја од таа редица не се наоѓа помеѓу тие два броја.

Решение. Одговорот е да. Најпрво ќе докажеме дека ова е точно за $n=2^m$ за сите природни броеви m, со индукција по m. За $m=1$ е очигледно. Нека претпоставиме дека можеме да ги распоредиме $1,2,3,\dots,2^m$ за некој природен број m во редица $(a_1,a_2,\dots,a_{2^m})$ така да аритметичката средина од било кои два различни броја не се наоѓа помеѓу нив. Не е тешко да се види дека

$$(b_1,b_2,\dots,b_{2^{m+1}})=(2a_1-1,2a_2-1,\dots,2a_{2^m}-1,2a_1,2a_2,\dots,2a_{2^m})$$

е распоред на броевите $1,2,\dots,2^{m+1}$ кој ги задоволува условите на проблемот. Навистина, аритметичката средина од броевите b_i и b_j, кога

$$1\le i<j\le 2^m \text{ или } 2^m+1\le i<j\le 2^{m+1}$$

не е помеѓу броевите b_i и b_j од индуктивната претпоставка и аритметичката средина од броевите b_i и b_j кога

$$1\le i\le 2^m<j\le 2^{m+1}$$

не е цел број. Па, тврдењето е докажано со помош на индукција.

За позитивен број кој не е степен на 2, секогаш може да се најде природен број n, таков што $n<2^m$. Потоа броевите $1,2,3,\dots,2^m$ ги распоредуваме како погоре, а потоа сите броеви кои се поголеми од n ги бришеме и новодобиената редица го задоволува условот на задачата.

3. (USAMO, 1988) Докажи дека за секој $n\ge 2$, постои множество S од n цели броеви така да $(a-b)^2$ го дели ab, за секои $a,b\in S$

Решение. Доказот ќе го дадеме со помош на математичка индукција по n. Ќе покажеме дека постои такво множество S од ненегативни елементи. За $n=2$, множеството S е дадено со $S=\{0,1\}$. Сега да претпоставиме дека за $n\ge 2$, бараното множество S_n од ненегативни броеви постои. Нека

$$L=НЗС((a-b)^2,ab),$$

каде (a,b) се сите парови од S_n. Дефинираме, $S_{n+1}=\{L+a:a\in S_n\}\cup\{0\}$. Тогаш S_{n+1} се состои од $(n+1)$ ненегативни броеви, бидејќи $L>0$. Ако $\alpha,\beta\in S_{n+1}$ и или $\alpha=0$ или $\beta=0$, тогаш $(\alpha-\beta)^2\mid\alpha\beta$. Ако $L+a$ и , каде a и b се различни елементи од S_n, тогаш

$$(L+a)(L+b)\equiv ab\equiv 0(\mathrm{mod}\,(a-b)^2),$$

па

$$(a-b)^2=\left((L+a)-(L-b)\right)^2$$

го дели $(L+a)(L+b)$, од каде со принципот на математичка индукција имаме дека тврдењето важи за секој $n\geq 2$.

4. (China, Shanghai Mathematical Competition, 1999) Нека S е множество со конечен број на точки од рамнината. Ако растојанијата помеѓу било кои две точки во S е одредено, тогаш за множеството S велиме дека е стабилно. Нека M_n е множество од $n\geq 4$ точки во рамнината и никои три од нив не се колинеарни. Да претпоставиме дека бројот на паровите од точки кои имаат одредено растојание помеѓу нив од M_n е $\frac{1}{2}n(n-3)+4$. Докажи дека M_n е стабилно.

Решение. Доказот ќе го дадеме со индукција по n. Кога $n=4$, бројот на парови од точки кои имаат одредени растојанија во M_4 е $\frac{1}{2}4(4-3)+4=6$. Но, 4 точки формираат $\binom{4}{2}=6$ парови од точки, па M_4 е стабилно. Да претпоставиме дека за $n=k\geq 4$ тврдењето важи. Тогаш, за $n=k+1$, да претпоставиме дека бројот на парови од точки кои имаат одредени растојанија во M_{n+1} е $\frac{1}{2}(k+1)(k-2)+4$, тогаш сумата на паровите од точки кои имаат одредени растојанија до некоја точка во M_{k+1} е еднаква на $(k+1)(k-2)+8$. Од Теоремата за средна вредност, постои точка A така да бројот на парови од точки кои имаат одредени растојанија до точката A е $l\leq\frac{1}{k+1}[(k+1)(k-2)+8]=k-1+\frac{7-k}{k+1}$. Бидејќи $\frac{7-k}{k+1}<1$, $l\leq k-1$. Бришејќи ја точката A, знаеме дека фигурата што останува има k точки и бројот на парови на точки кои имаат одредени растојанија е најмалку $\frac{1}{2}(k+1)(k-2)+4-(k-1)=\frac{1}{2}k(k-3)+4$. Од индуктивната претпоставка, имаме дека множество кое се состои од k точки е стабилно и има најмалку $\frac{1}{2}(k+10(k-2)+4-\binom{k}{2})-3$ точки B,C,D од k-те точки така да растојанијата помеѓу A и секоја од точките B,C,D се одередени. Да претпоставиме дека $\overline{AB}=x, \overline{AC}=y, \overline{AD}=z$, каде x,y,z се позитивни реални броеви. Тогаш точката A е единствена. Навистина, ако постои друга точка $A'\neq A$ таква да $\overline{A'B}=x, \overline{A'C}=y, \overline{A'D}=z$, тогаш трите точки B,C,D лежат на симетралата на отсечката AA', што е во контрадисkција со тоа дека B,C,D не се колинеарни. Па, согласно принципот на математичка индукција тврдењето важи за секој $n\geq 4$.

Задачи за самостојна работа

1. Нека S е множество од 10 различни броја изберени од множеството $\{1,2,3,...,99\}$. Докажи дека S мора да содржи две дисјунктни подмножества за кои сумата на елементите од тие подмножества е еднаква.
2. Нека се изберени n точки на кружница и попарно поврзани со секанти. Ако знаеме дека не постојат три секанти кои се сечат во иста точка, на колку региони е поделен кругот?
3. Нека $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ е низата на Фибоначи дадена со $F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ за $n \geq 3$. Докажи дека секој природен број може да се запише како сума од различни елементи на низата на Фибоначи.

Користена литература

1. Andreescu, T.; Feng, Z., 102 Combinatorial Problems from the Training of the USA IMO Team, Birkhäuser, 2002.
2. Andreescu, T.; Feng, Z., A Path to Combinatorics for Undergraduate Students: Counting Strategies, Birkhäuser, 2003.
3. Zhang, Y., Combinatorial problems in mathematical competitions, World Scientific, 2011
4. Jiagu, X., Lecture notes on Mathematical Olympiad courses, World Scientific, 2012