Републички натпревар 2015

I година

1. Одреди ги ненултите цифри a,b и c за кои важи $\frac{1}{a+b+c}=\overline{0,abc}$. Најди ги сите решенија!

Решение. Со множењето на даденото равенство со $1000(a+b+c)$ добиваме $1000=\overline{abc}(a+b+c)$. Бидејќи a,b и c се цифри, за нив важи $a+b+c\le 27$. Од друга страна, имаме дека 1000 како производ на два броја (од кои еден трицифрен) може да се претстави како $500\cdot 2,\ 250\cdot 4,\ 200\cdot 5,\ 125\cdot 8,\ 100\cdot 10.$ Проверуваме за кој од троцифрените броеви збирот на цифрите го дава вториот множител. Тоа единствено важи за $125\cdot 8$, па $a=1, b=2$ и $c=5.$

2. Дали може 77 кутии со димензии $3\times 3\times 1$ да ги сместиме во сандак со димензии $7\times 9\times 11$. Образложи го својот одговор.

Решение. Бидејќи $77\cdot(3\cdot 3\cdot 1)=7\cdot 9\cdot 11$ следува дека волуменот на сите кутии е еднаков на волуменот на сандакот. Затоа мора секоја од страните (ѕидовите) на сандакот да ги содржи, без остаток, страните или комбинација на страните (ѕидовите) на кутиите. Плоштината на ѕидовите на кутиите е или 9 или 3 квадратни единици. Тоа, пак, значи дека плоштината на секој ѕид на сандакот мора да е делива со 3. Но плоштина од 77 квадратни единици на ѕидот со димензии 7×11 не е делива со 3, па затоа кутиите не можеме да ги сместиме во сандакот.

3. Најди го бројот на подредени тројки од природни броеви (a,b,c) такви што $\text{НЗС}(a,b)=1000, \text{НЗС}(b,c)=2000$ и $\text{НЗС}(c,a)=2000$.

Решение. Бидејќи броевите 1000 и 2000 се од облик $2^m 5^n$ з а m,n природни броеви, добиваме дека и броевите a,b,c се исто така од облик $2^m 5^n$. Нека $a=2^{m_1}5^{n_1}$, $b=2^{m_2}5^{n_2}$ и $c=2^{m_3}5^{n_3}$ за m_i,n_i , $i=1,2,3$ ненегативни цели броеви . Од условот на задачата имаме :

$$\max\{m_1,m_2\}=3,\ \max\{m_2,m_3\}=4,\ \max\{m_3,m_1\}=4 \qquad (1)$$

$$\max\{n_1,n_2\}=3,\ \max\{n_2,n_3\}=3,\ \max\{n_3,n_1\}=3. \qquad (2)$$

Од (1) добиваме дека $m_3=4$, $m_1=3$ или $m_2=3$, ако еден е 3 додека другиот може да биде 0,1,2,3. Постојат такви 7 подредени тројки

$$(0,3,4),(1,3,4),(2,3,4),(3,0,4),(3,1,4),(3,2,4),(3,3,4)\ .$$

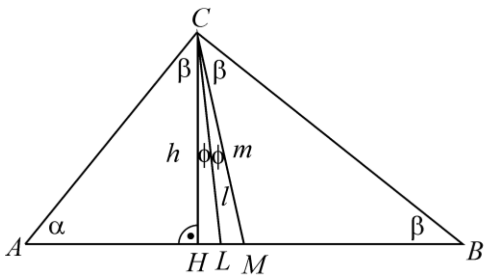
Од (2) добиваме дека два од n_1, n_2, n_3 се 3 додека другиот може да биде 0,1,2,3. Бројот на такви подредени тројки е 10. Тоа се

$$(3,3,0),(3,3,1),(3,3,2),(3,0,3),(3,1,3),(3,2,3),(0,3,3),(1,3,3),(2,3,3),(3,3,3)\ .$$

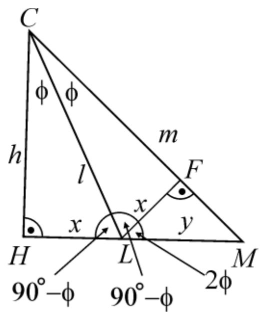
Бидејќи изборот на тројките (m_1, m_2, m_3), (n_1, n_2, n_3) е независен, добиваме дека бројот на тројки (a,b,c) е $7 \cdot 10 = 70$.

4. Даден е правоаголен триаголник ABC, таков што за катетите AC и BC важи $\overline{AC} < \overline{BC}$. Должината на тежишната линија и висината спуштени кон хипотенузата во тој триаголник се m и h, соодветно. Пресметај ја должината на симетралата на правиот агол.

Решение. Бидејќи $\triangle ABC$ е правоаголен, следува дека $\overline{CM} = m = \overline{BM}$ т.е. $\triangle BMC$ е рамнокрак (цртеж 1), па затоа $\measuredangle BCM = \beta = \measuredangle ABC$. Очигледно и $\measuredangle ACH = \beta$ (од правоаголниот триаголник AHC). Бидејќи $\beta < 45^\circ$ (затоа што $\overline{AC} < \overline{BC}$) следува дека симетралата CL на $\measuredangle HCM$ е истовремено симетрала на аголот ACB па тогаш е јасно дека $\measuredangle HCL = \measuredangle MCL = \phi = 45^\circ - \beta$.



цртеж 1



цртеж 2

Нека $x = \overline{HL}$ и $y = \overline{LM}$ и нека F е подножјето на нормалата спуштена од L на CM (цртеж 2). Заради $\Delta CHL \cong \Delta CFL$ добиваме $\overline{LF} = x$. Притоа, $\triangle HMC \sim \triangle FML$, па имаме: $m : h = y : x$, т.е. $y = \frac{mx}{h}$. Понатаму, од правоаголниот $\triangle HCM$ наоѓаме:

$$h^2 + (x+y)^2 = m^2; \; h^2 + (x + \tfrac{mx}{h})^2 = m^2 \text{ т.е. } x^2 = h^2 \cdot \tfrac{m-h}{m+h}.$$

Конечно, од правоаголниот $\triangle HLC$ добиваме:

$$l^2 = h^2 + x^2 = h^2 + h^2 \tfrac{m-h}{m+h} = h^2 \tfrac{2m}{m+h} \text{ т.е. } l = h\sqrt{\tfrac{2m}{m+h}}.$$

II година

1. Дадена е квадратната равенка $3a^2x^2 + 10a\sqrt{b}x + 3b = 0$, $b > 0, a \neq 0$. Докажи дека ако корените на равенката, x_1 и x_2, го задоволуваат условот

$$3(x_1 + x_2) = 5(x_1x_2 + 1),$$

тогаш тие не зависат од a и b.

Решение. Од $3(x_1+x_2)=5(x_1x_2+1)$ имаме $3(-\frac{10a\sqrt{b}}{3a^2})=5(\frac{3b}{3a^2}+1)$, односно $-2a\sqrt{b}=b+a^2$ и оттука $(\sqrt{b}+a)^2=0$. Значи, $\sqrt{b}+a=0$, т.е. $a=-\sqrt{b}$. Тогаш, ја добиваме равенката $3bx^2-10bx+3b=0$, $3x^2-10x+3=0$, чии што решенија се $\frac{1}{3}$ и 3, па корените не зависат од a и b.

2. Докажи дека ако за комплексниоот број z важи $|z+1|<\frac{1}{\sqrt{2}}$, тогаш $|z^2+1|\geq 1$.

Решение. Да претпоставиме дека постои комплексен број z таков што $|z+1|<\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $|z^2+1|<1$. Нека $z=a+bi$. Тогаш

$$z+1=a+1+bi \text{ и } z^2+1=a^2-b^2+1+2abi.$$

Од $|z+1|<\frac{1}{\sqrt{2}}$ добиваме

$$(a+1)^2+b^2<\tfrac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad a^2+2a+1+b^2<\tfrac{1}{2} \quad\Leftrightarrow$$
$$2a^2+4a+2+2b^2<1 \quad\Leftrightarrow$$
$$2b^2<-2a^2-4a-1. \tag{1}$$

Од $|z^2+1|<1$ добиваме

$$(a^2-b^2+1)^2+4a^2b^2<1 \quad\Leftrightarrow$$
$$a^4+b^4+1-2a^2b^2+2a^2-2b^2+4a^2b^2<1 \quad\Leftrightarrow$$
$$a^4+b^4+1+2a^2b^2+2a^2-2b^2<1 \quad\Leftrightarrow$$
$$(a^2+b^2)^2<2b^2-2a^2. \tag{2}$$

Ако оценката на $2b^2$ од (1) ја замениме во (2) добиваме

$$(a^2+b^2)^2<-2a^2-4a-1-2a^2 \quad\Leftrightarrow$$
$$(a^2+b^2)^2+4a^2+4a+1<0 \quad\Leftrightarrow$$
$$(a^2+b^2)^2+(2a+1)^2<0.$$

Последното неравенство не е можно. Следува дека за секој комплексен број z, ако $|z+1|<\frac{1}{\sqrt{2}}$, тогаш $|z^2+1|\geq 1$.

3. Даден е правоаголен триаголник ABC со плоштина P. Изрази ја преку P, плоштината на триаголникот чии темиња се ортогоналните проекции на тежиштето врз страните на триаголникот.

Решение. Нека D, E и F се ортогонални проекции на тежиштето T врз страните AC, BC и AB, соодветно.

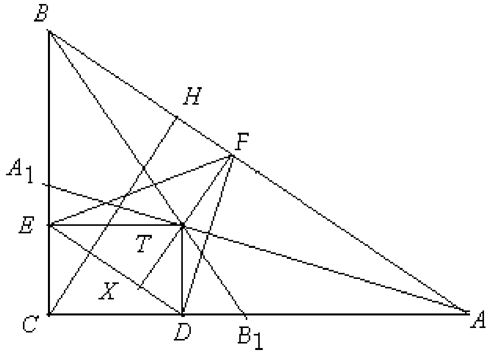
Четириаголникот $CDTE$ е правоаголник и оттука добиваме

$$\overline{CD}:\overline{CA}=\overline{A_1T}:\overline{A_1A}=1:3$$

и

$$\overline{CE}:\overline{CB}=\overline{B_1T}:\overline{B_1B}=1:3.$$

Оттука следува дека DE и AB се паралелни и $\overline{DE}=\frac{\overline{AB}}{3}$. Ако FX е нормална на DE, т.е. на AF, тогаш FX и CH се паралелни и $\overline{FX}=\frac{2}{3}\overline{CH}$. Затоа, плоштината на триаголникот EDF е



$$\frac{\overline{ED}\cdot\overline{FX}}{2}=\frac{\overline{AB}\cdot 2\overline{CH}}{2\cdot 3\cdot 3}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CH}}{3\cdot 3}=\frac{2}{9}P.$$

4. Во множеството на реални броеви реши ја равенката

$$\sqrt{5x^2+14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1}.$$

Решение. Ќе ја определиме дефиниционата област. Имаме :

$$5x^2+14x+9=5(x+1)(x+\tfrac{9}{5})\geq 0,\ x^2-x-20=(x-5)(x+4)\geq 0 \text{ и } x+1\geq 0,$$

па добиваме дека дефиниционата област е $x\geq 5$.

$$\sqrt{5x^2+14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1},$$

$$\sqrt{(5x+9)(x+1)}=\sqrt{(x-5)(x+4)}+5\sqrt{x+1},$$

$$2x^2-5x+2=5\sqrt{(x-5)(x+4)(x+1)},$$

$$2(x^2-4x-5)+3x+12=5\sqrt{(x-5)(x+1)(x+4)},$$

$$2(x-5)(x+1)+3(x+4)=5\sqrt{(x-5)(x+1)(x+4)},$$

$$\frac{2(x-5)(x+1)+3(x+4)}{x+4}=\frac{5\sqrt{(x-5)(x+1)(x+4)}}{x+4},$$

$$\frac{2(x-5)(x+1)}{x+4}+3=5\sqrt{\frac{(x-5)(x+1)}{x+4}}$$

.

Ако $\sqrt{\frac{(x-5)(x+1)}{x+4}}=y$, тогаш $2y^2-5y+3=0$ и добиваме $y_1=\frac{3}{2}, y_2=1$. Од $\sqrt{\frac{(x-5)(x+1)}{x+4}}=\frac{3}{2}$, последователно добиваме

$$\frac{(x-5)(x+1)}{x+4}=\frac{9}{4}$$

$$4(x-5)(x+1)=9(x+4)$$

$$4x^2-25x-56=0$$

и оттука $x_{1/2}=\frac{25\pm\sqrt{625+896}}{8}$, т.е. $x_1=8$, $x_2=-\frac{7}{4}$. Од $\sqrt{\frac{(x-5)(x+1)}{x+4}}=1$, последователно добиваме

$$\frac{(x-5)(x+1)}{x+4}=1$$
$$(x-5)(x+1)=x+4,$$
$$x^2-5x-9=0$$

и оттука $x_{3/4}=\frac{5\pm\sqrt{25+36}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{61}}{2}$.

Конечно, бидејќи решенија на равенката се 8 и $\frac{5+\sqrt{61}}{2}$.

III година

1. Реши ја неравенката

$$\frac{9^x-5\cdot 15^x+4\cdot 25^x}{-9^x+8\cdot 15^x-15\cdot 25^x}<0.$$

Решение. Неравенката ќе ја запишеме во облик

$$\frac{(\frac{3}{5})^{2x}-5\cdot(\frac{3}{5})^x+4}{-(\frac{3}{5})^{2x}+8\cdot(\frac{3}{5})^x-15}<0,$$

а со смената $(\frac{3}{5})^x=t$ добиваме

$$\frac{t^2-5t+4}{-t^2+8t-15}<0, \text{ т.е. } \frac{(t-1)(t-4)}{-(t-3)(t-5)}<0,$$

односно

$$\frac{(t-1)(t-4)}{(t-3)(t-5)}>0.$$

Решение на последната неравенка е множеството $(0,1)\cup(3,4)\cup(5,\infty)$. Според тоа, решение на почетната неравенка е множеството

$$x\in(-\infty,\log_{\frac{3}{5}}5)\cup(\log_{\frac{3}{5}}4,\log_{\frac{3}{5}}3)\cup(0,\infty).$$

2. Докажи дека во секој правоаголен триаголник важи неравенството

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\geq\frac{2ab}{c^2},$$

каде α и β се острите агли, a и b се должините на катетите и c е должината на хипотенузата.

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина за позитивните броеви $\sin\alpha$ и $\sin\beta$ (аглите се остри по услов, па $\sin\alpha,\sin\beta>0$) имаме

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{2}\geq\sqrt{\sin\alpha\sin\beta},$$

па ако ги искористиме адиционите формули добиваме

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\geq\sqrt{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Бидејќи

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \sin\alpha=\frac{a}{c} \text{ и } \sin\beta=\frac{b}{c},$$

од последното неравенство следи

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\geq\sqrt{2}\sqrt{\frac{a}{c}}\cdot\sqrt{\frac{b}{c}},$$

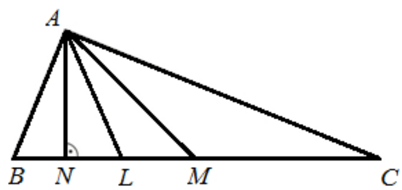
односно

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\geq\frac{2ab}{c^2},$$

3. На страната BC на триаголникот ABC редоследно лежат точките N,L,M, при што N е најблиску до B и AN е висина, AL симетрала на $\measuredangle CAB$ и AM е тежишната линија. Ако се знае дека $\measuredangle NAB=\measuredangle LAN=\measuredangle MAL=\measuredangle CAM$, најди ги аглите на триаголникот.

Решение. Ќе ја примениме синусна теорема на $\triangle ALM$ и добиваме

$$\frac{\overline{AM}}{\sin\measuredangle ALM}=\frac{\overline{AL}}{\sin\measuredangle AML}.$$



Да забележиме дека при условите на задачата

$\sin\measuredangle ALM=90^\circ+\frac{\alpha}{4}$ и $\sin\measuredangle AML=90^\circ-\frac{\alpha}{2}$,

јасно $\triangle ABL$ е рамнокрак и $\overline{AB}=\overline{AL}=c$.

Со замена во равенството добиено од синусната теорема добиваме $\overline{AM}=\frac{c\cdot\cos\frac{\alpha}{4}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Од друга страна, точката M е средина на страната BC, па $P_{\triangle ABC}=2P_{\triangle AMC}$, односно $\frac{1}{2}bc\cdot\sin\alpha=\overline{AM}\cdot b\cdot\sin\frac{\alpha}{4}$. Од последните две равенства, го изразуваме $\sin\alpha$ и тоа

$$\sin\alpha=\frac{2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}}{\cos\frac{\alpha}{2}}, \text{ односно } 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} \text{ или } \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}.$$

Од тука $\alpha=90^\circ$, $\beta=90^\circ-\frac{\alpha}{4}$, $\gamma=90^\circ-\beta=\frac{\alpha}{4}$.

4. Нека $A_1A_2A_3$ е даден триаголник, а B_1, B_2, B_3 се точки од страните A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2, соодветно, различни од темињата на триаголникот $A_1A_2A_3$. Докажи дека симетралите на отсечките A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 не се сечат во една точка.

Решение. Нека претпоставиме дека симетралите на отсечките A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 се сечат во точката P. Без губење од општост претпоставуваме дека

$$PA_1\leq PA_2\leq PA_3.$$

Тогаш A_1, A_2 лежат во круг со центар во P и радиус PA_3. Ова значи дека B_3 лежи во внатрешноста на овој круг и $PB_3 < PA_3$. Од друга страна P лежи на симетралата на A_3B_3, па $PA_3 = PB_3$. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

IV година

1. Нека a,b,c се позитивни реални броеви така што a^2,b^2,c^2 се последователни членови на аритметичка прогресија. Докажи дека и броевите $\frac{1}{b+c},\frac{1}{a+c},\frac{1}{a+b}$ се последователни членови на аритметичка прогресија.

Решение. Од тоа што a^2,b^2,c^2 се членови на аритметичка прогресија следува дека

$$2b^2 = a^2 + c^2$$
$$2b^2 + 2ac = (a+c)^2$$
$$2(b^2 + ac) = (a+c)^2$$

Сега добиваме

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b} = \frac{a+2b+c}{ab+b^2+ac+bc} = \frac{a+2b+c}{ab+bc+\frac{(a+c)^2}{2}} = \frac{2(a+2b+c)}{2b(a+c)+(a+c)^2} = \frac{2(a+2b+c)}{(a+c)(a+2b+c)} = \frac{2}{a+c},$$

што значи дека броевите $\frac{1}{b+c},\frac{1}{a+c},\frac{1}{a+b}$ се последователни членови на аритметичка прогресија

2. Ако важи $f_1(x) = \frac{x}{x-1}$, $f_2(x) = \frac{1}{1-x}$ и $f_{n+2}(x) = f_{n+1}(f_n(x))$ за $n \geq 1$. Пресметај $f_{2015}(2015)$.

Решение. Да ја примениме дадената рекурентна формула за неколку функции:

$$f_3(x) = 1-x,\ f_4(x) = \frac{x}{x-1},\ f_5(x) = \frac{x-1}{x},\ f_6(x) = \frac{1}{x},\ f_7 = f_1,\ f_8 = f_2 \text{ итн.}$$

Забележуваме дека имаме периодично повторување, со период 6. Затоа

$$f_{2015}(x) = f_5(x) \text{ и } f_{2015}(2015) = \frac{2014}{2015}.$$

3. Дадени се три природни броеви a,b и c. Ако за секој природен број n може да се конструира триаголник со должини на страни a^n, b^n и c^n, докажи дека секој таков триаголник е рамнокрак.

Решение. Нека $a \geq b \geq c$. Броевите a^n, b^n и c^n можат да бидат должини на страни на триаголник само ако важи $a^n < b^n + c^n$, односно $a^n - b^n < c^n$. Последното неравенство го запишуваме во обликот

$$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+ab^{n-2}+b^{n-1})<c^n \qquad (*)$$

Но, бидејќи $a \geq c$ и $b \geq c$, вториот множител на левата страна во (*) не е помал од nc^{n-1}. Тогаш, ако важи (*), ќе важи и неравенството $(a-b)nc^{n-1}<c^n$, т.е. $a-b<\frac{c}{n}$. Последното неравенство е исполнето за секој природен број n само кога важи $a=b$.

4. Нека m е природен број, $A=\{-m,-m+1,\dots,-1,0,1,...,m-1,m\}$ и $f:A\to A$ е функција таква што $f(f(n))=-n$ за секој $n\in A$. Докажи дека бројот m е парен.

Решение. Нека $n\in A$ и $O_n=\{n,f(n),-n,f(-n)\}$. Бидејќи $f(f(n))=-n$ и $f(f(-n)=n$, јасно е дека ако $k\in A$, тогаш или $O_k=O_n$ или $O_n\cap O_k$ е празно множество. Уште повеќе добиваме дека $f(n)\neq f(-n)$ за $n\neq 0$. Понатаму, ако $f(\pm n)=\pm n$, тогаш $\mp n=f(f(\pm n))=f(\pm n)=\pm n$, односно $n=0$. Исто така, ако $f(\pm n)=\mp n$ добиваме $\mp n=f(f(\pm n))=f(\mp n)$, па $n=0$. Оттука имаме дека $|O_n|=4$, за $n\neq 0$, што значи дека $A\setminus\{0\}$ може да се запише како дисјунктна унија од множества со четири елементи, од каде добиваме дека m е парен.