О КОШИЈЕВОЈ НЕЈЕДНАКОСТИ, ЊЕНИМ ПОСЛЕДИЦАМА И ПРИМЕНИ

др Шефкет Арсланагић, **Сарајево**

Неједнакост

(1) $$\left(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\right)^2 \leqslant \left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right),$$

где су $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ низови реалних бројева, при чему важи једнакост ако и само ако је $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$, зове се Кошијева* или Коши-Шварцова† или Коши-Буњаковског‡ или пак Коши-Шварц-Буњаковског. Ми ћемо усвојити и користити први назив. Ова једнакост је веома важна и веома често се користи у различитим областима математике и теоријске физике. Први је до ње дошао Коши, 1821. године. Интегрални аналогон Кошијеве неједнакости:

$$\left(\int_a^b a(x)b(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int_a^b a^2(x)dx \cdot \int_a^b b^2(x)dx,$$

је доказао руски математичар Буњаковски и објавио је 1859. године. Рецимо и то да је ову неједнакост немачки математичар Шварц користио у својим радовима тек 1884. године (види [3], стр. 45 и 203). Сада ћемо дати два доказа Кошијеве неједнакости (1).

Доказ 1. Напишимо следећу једнакост:

$$(pa_1+qb_1)^2+(pa_2+qb_2)^2+\cdots+(pa_n+qb_n)^2 = Ap^2+2Bpq+Cq^2,$$

где су $p, q, a_i, b_i \in \mathbb{R}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ и

$$A=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2,\ B=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n,\ C=b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2.$$

Како лева страна горње једнакости представља суму квадрата, то мора бити:

$$Ap^2+2Bpq+Cq^2 \geqslant 0 \quad \text{за све } p, q \in \mathbb{R}.$$

Значи, морају бити испуњени ови услови: $A>0$ и $(2Bq)^2-4ACq^2 \leqslant 0$, тј. $B^2 \leqslant AC$, односно,

$$\left(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\right)^2 \leqslant \left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right).$$

* Caushy, A. (1789-1857)-француски математичар

† Schwarz, H. A. (1843-1921)-немачки математичар

‡ Буниаковски, В. Ј. (1804-1889)-руски математичар

Очигледно, знак једнакости важи ако и само ако је: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$. Овим је неједнакост (1) доказана.

Доказ 2. Напишимо неједнакост (1) у облику:

$$(1') \qquad \frac{|a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n|}{AB} \leqslant 1,$$

где је $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$ и $B = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}$. Доказаћемо да је $(1')$, односно (1), тачно. Имајући у виду да је $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ и $|xy| \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$, имамо:

$$\begin{aligned}
\frac{|a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n|}{AB} &\leqslant \frac{|a_1b_1|}{AB} + \frac{|a_2b_2|}{AB} + \cdots + \frac{|a_nb_n|}{AB} \\
&= \frac{|a_1|}{A} \cdot \frac{|b_1|}{B} + \frac{|a_2|}{A} \cdot \frac{|b_2|}{B} + \cdots + \frac{|a_n|}{A} \cdot \frac{|b_n|}{B} \\
&\leqslant \frac{1}{2}\left(\left(\frac{a_1}{A}\right)^2 + \left(\frac{b_1}{B}\right)^2\right) + \cdots + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{a_n}{A}\right)^2 + \left(\frac{b_n}{B}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{A^2}\left(a_1^2 + \cdots + a_n^2\right) + \frac{1}{B^2}\left(b_1^2 + \cdots + b_n^2\right)\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Овим је $(1')$, односно (1), доказано.

Једнакост у $(1')$, односно у (1), важи у случају када је $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$.

Приметимо да смо уствари доказали да важи јача неједнакост од $(1')$, односно (1):

$$|a_2b_2| + \cdots + |a_nb_n| \leqslant AB,$$

тј.

$$|a_2b_2| + \cdots + |a_nb_n| \leqslant \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}$$

У овој једнакости важи једнакост само ако је $\frac{|a_1|}{A} = \frac{|b_1|}{B}, \frac{|a_2|}{A} = \frac{|b_2|}{B}, \ldots, \frac{|a_n|}{A} = \frac{|b_n|}{B}$, тј. за $\left|\frac{a_1}{b_1}\right| = \left|\frac{a_2}{b_2}\right| = \cdots = \left|\frac{a_n}{b_n}\right|$.

За $n = 3$, Кошијева неједнакост $(1')$ има облик:

$$(1'') \qquad |a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3| \leqslant \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}.$$

Појаснимо геометријски смисао неједнакости $(1'')$. Ако узмемо два вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, тада је лева страна у $(1'')$ уствари апсолутна вредност скаларног производа вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а десна страна је производ њихових дужина $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ и $|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$. Но, пошто је

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}),$$

то из чињенице да је $\left|\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})\right| \leqslant 1$, добијамо $(1'')$.

Аналоган је и геометријски смисао Кошијеве неједнакости $(1')$ у простору димензије n, тј. $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$, $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$ и $|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}$, $\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$.

Још један доказ неједнакости (1) налази се у [5], стр. 32-33.

Дајемо неколико последица неједнакости (1).

Последица 1. Нека је $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 1$. Тада је из (1):

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leqslant \sqrt{n\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)},$$

односно

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}},$$

што представља неједнакост између аритметичке и квадратне средине уколико су $a_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Последица 2. Стављајући $a_1^2 = x_1, a_2^2 = x_2, \ldots, a_n^2 = x_n$, тј. $b_1^2 = \frac{1}{x_1}, b_2^2 = \frac{1}{x_2}, \ldots, b_n^2 = \frac{1}{x_n}$ у (1), добијамо:

$$\left(\sqrt{x_1}\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \sqrt{x_2}\frac{1}{\sqrt{x_2}} + \cdots + \sqrt{x_n}\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)^2 \leqslant (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)$$

или

$$(\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n})^2 \leqslant (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right),$$

тј.

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \geqslant n^2,$$

односно

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}},$$

за $x_i > 0, i = 1, 2, \ldots, n$, што представља неједнакост између аритметичке и хармонијске средине.

Последица 3. Из (1) се након кореновања добија:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \leqslant \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}.$$

Ако се левој и десној страни горње неједнакости, које су претходно помножене са 2, дода $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2$, добија се

$$(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+\cdots+(a_n+b_n)^2 \leqslant \left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}\right)^2$$

или

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2} \geqslant \sqrt{(a_1 + b_1)^2 + \cdots + (a_n + b_n)^2}.$$

Сада ћемо доказати неколико неједнакости користећи при томе Кошијеву неједнакост (1).

Пример 1. Доказати неједнакост $(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geqslant 9$, за $x, y, z > 0$.

Решење. Стављајући у (1) да је $a_1 = \sqrt{x}$, $a_2 = \sqrt{y}$, $a_3 = \sqrt{z}$, $b_1 = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $b_2 = \frac{1}{\sqrt{y}}$, $b_3 = \frac{1}{\sqrt{z}}$, добијамо

$$\left(\sqrt{x}^2 + \sqrt{y}^2 + \sqrt{z}^2\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}^2} + \frac{1}{\sqrt{y}^2} + \frac{1}{\sqrt{z}^2}\right) \geqslant \left(\sqrt{x}\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{y}\frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{z}\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2,$$

односно $(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geqslant 9$, што је и требало доказати. Важи једнакост за $x = y = z$.

Пример 2. (а) Нека је $a + b + c = 1$. Доказати да је $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \frac{1}{3}$.

(б) Нека је $a + b + c = 1$ и нека су a, b, c дужине страница троугла. Доказати да је $a^2 + b^2 + c^2 < \frac{1}{2}$.

Решење. Из Кошијеве неједнакости (1) имамо:

$$1^2 = (a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1)^2 \leqslant (a^2 + b^2 + c^2) \cdot (1^2 + 1^2 + 1^2),$$

тј. $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \frac{1}{3}$, што је и требало доказати. Важи једнакост ако је $a = b = c = \frac{1}{3}$; тада је $a + b + c = 1$ и $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{3}$.

(б) Пошто су a, b, c дужине страница троугла, то је $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, односно

$$\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{c} \cdot \vec{a} = \vec{0},$$

где је

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\alpha,\ \vec{b} \cdot \vec{c} = bc\cos\beta,\ \vec{a} \cdot \vec{c} = ac\cos\gamma$$

(α, β, γ су углови између одговарајућих вектора). Сада је, због $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= -2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c}) \\ &< 2(ab + bc + ac) \\ &= (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \\ &= 1 - (a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

а одавде $a^2 + b^2 + c^2 < \frac{1}{2}$. Очигледно, овде важи строга неједнакост.

Пример 3. Нека су a, b, c дужине страница троугла. Доказати да важи неједнакост

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c)^2 + c^2a(c-a) \geqslant 0. \tag{2}$$

Решење. Нека је $s = \frac{a+b+c}{2}$, $x = s-a$, $y = s-b$, $z = s-c$. Имамо да је: $a = (s-b)+(s-c) = y+z, b = (s-c)+(s-a) = z+x, c = (s-a)+(s-b) = x+y$. Сада, неједнакост (2) постаје

$$(y+z)^2(z+x)(y-x) + (z+x)^2(x+y)(z-y) + (x+y)^2(y+z)(x-z) \geqslant 0,$$

или након сређивања

$$xy^3 + yz^3 + zx^3 \geqslant xyz(x+y+z). \tag{3}$$

Стављајући у Кошијеву неједнакост (за $n = 3$)

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leqslant \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right), \tag{1}$$

да је $a_1 = \sqrt{yz^3}, a_2 = \sqrt{zx^3}, a_3 = \sqrt{xy^3}, b_1 = \sqrt{x}, b_2 = \sqrt{y}, b_3 = \sqrt{z}$, добијамо

$$(\sqrt{xyz}(x+y+z))^2 \leqslant (xy^3 + yz^3 + zx^3)(x+y+z),$$

тј.

$$xyz(x+y+z) \leqslant xy^3 + yz^3 + zx^3,$$

а ово је неједнакост (3). Тиме је доказана дата неједнакост (2).

Једнакост важи у случају када је $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$, односно $\frac{xy^3}{z} = \frac{yz^3}{x} = \frac{zx^3}{y}$, а одавде је $x = y = z$ или $a = b = c$, тј. када је у питању једнакостраничан троугао.

Пример 4. Доказати да за сваки троугао важи неједнакост

$$at_a + bt_b + ct_c \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(a^2 + b^2 + c^2), \tag{4}$$

са једнакошћу ако и само ако је троугао једнакостраничан.

Решење. Стављајући у Кошијеву неједнакост (1) да је: $a_1 = a, a_2 = b, a_3 = c, b_1 = t_a$, $b_2 = t_b, b_3 = t_c$, добијамо:

$$(at_a + bt_b + ct_c)^2 \leqslant (a^2 + b^2 + c^2)(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2)$$

или

$$at_a + bt_b + ct_c \leqslant \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{t_a^2 + t_b^2 + t_c^2}. \tag{5}$$

Како је $t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$**, то из (5) добијамо

$$at_a + bt_b + ct_c \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(a^2 + b^2 + c^2),$$

тј. (4) је тачно.

Пример 5. За сваки троугао важи

$$\frac{t_a}{h_a} + \frac{t_b}{h_b} + \frac{t_c}{h_c} \leqslant \sqrt{2 + \frac{3R}{2r} + \frac{R^2}{r^2}}, \tag{6}$$

са једнакошћу само ако је троугао једнакостраничан.

Решење. Применом Кошијеве неједнакости (1) на бројеве $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ и $t_a\sqrt{a}, t_b\sqrt{b}, t_c\sqrt{c}$, добија се

$$\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}t_a + \sqrt{b} \cdot \sqrt{b}t_b + \sqrt{c} \cdot \sqrt{c}t_c\right)^2 \leqslant (a + b + c)\left(at_a^2 + bt_b^2 + ct_c^2\right). \tag{7}$$

Како важи једнакост (доказати!): $at_a^2 + bt_b^2 + ct_c^2 = \frac{s}{2}(s^2 + 2Rr + 5r^2)$, из (7) следи:

$$at_a + bt_b + ct_c \leqslant s\sqrt{s^2 + 2Rr + 5r^2}. \tag{8}$$

На основу неједнакости ([2], 5.8) која гласи $s^2 \leqslant 4R^2 + 4Rr + 3r^2$, из неједнакости (8) се добија неједнакост

$$at_a + bt_b + ct_c \leqslant 2s\sqrt{2r^2 + \frac{3}{2}Rr + R^2},$$

која је, због $a = \frac{P}{h_a}, b = \frac{P}{h_b}, c = \frac{P}{h_c}$ и $P = sr$ еквивалентна са траженом једнакошћу (6).

Овај пример је теорема 4, из [1].

Пример 6. Доказати да за произвољне позитивне бројеве $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ важи неједнакост:

$$\frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{2(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)} \leqslant \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \cdots + \frac{a_n}{a_1 + a_2}. \tag{9}$$

Решење. Ако у Кошијеву неједнакост (1) написану у облику

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \leqslant \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}$$

ставимо да је

$$x_k = \sqrt{a_k(a_{k+1} + a_{k+2})}, \quad y_k = \sqrt{\frac{a_k}{a_{k+1} + a_{k+2}}},$$

** видети чланак **Шта је математика!? II**

где је $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ и искористимо очигледну неједнакост $a_i \cdot a_j \leqslant \frac{a_i^2 + a_j^2}{2}$ добијамо:

$$\begin{aligned}
(a_1 + \cdots + a_n)^2 &= (x_1y_1 + \cdots + x_ny_n)^2 \\
&\leqslant (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) \\
&= (a_1(a_2 + a_3) + \cdots + a_n(a_1 + a_2)) \left(\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_1 + a_2} \right) \\
&= (a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_na_1 + a_na_2) \left(\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_1 + a_2} \right) \\
&\leqslant \left(\frac{a_1^2 + a_2^2}{2} + \frac{a_1^2 + a_3^2}{2} + \cdots + \frac{a_n^2 + a_1^2}{2} + \frac{a_n^2 + a_2^2}{2} \right) \times \\
&\quad \times \left(\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_1 + a_2} \right) \\
&= 2\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right) \left(\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_1 + a_2} \right).
\end{aligned}$$

Овим је неједнакост (9) доказана.

Важи једнакост ако је $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Неједнакост (9) је из [5].

Пример 7. Ако су x, y, z произвољни позитивни реални бројеви, t_a, t_b, t_c тежишне дужи неког троугла, P површина тог троугла, доказати да важи неједнакост:

$$\frac{x}{y+z}t_a^4 + \frac{y}{z+x}t_b^4 + \frac{z}{x+y}t_c^4 \geqslant \frac{9}{2}P^2. \tag{10}$$

Решење. Користећи Кошијеву неједнакост (1) за $n = 3$, добијамо:

$$\begin{aligned}
\left(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2\right)^2 &= \left(\sqrt{y+z}\frac{t_a^2}{\sqrt{y+z}} + \sqrt{z+x}\frac{t_b^2}{\sqrt{z+x}} + \sqrt{x+y}\frac{t_c^2}{\sqrt{x+y}} \right)^2 \\
&\leqslant ((y+z) + (z+x) + (x+y)) \left(\frac{t_a^4}{y+z} + \frac{t_b^4}{z+x} + \frac{t_c^4}{x+y} \right)
\end{aligned}$$

а одавде:

$$\frac{x}{y+z}t_a^4 + \frac{y}{z+x}t_b^4 + \frac{z}{x+y}t_c^4 \geqslant \frac{1}{2}\left(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2\right)^2 - \left(t_a^4 + t_b^4 + t_c^4\right). \tag{11}$$

Користећи једнакости:

$$t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2),$$

$$t_a^4 + t_b^4 + t_c^4 = \frac{9}{16}(a^4 + b^4 + c^4),$$

$$\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2 = a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2,$$

добијамо сада из (11):

$$\frac{x}{y+z}t_a^4 + \frac{y}{z+x}t_b^4 + \frac{z}{x+y}t_c^4 \geqslant \frac{9}{32}\left(2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right) - \left(a^4+b^4+c^4\right)\right). \tag{12}$$

На основу Херонове формуле за површину троугла $P^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$, $s = \dfrac{a+b+c}{2}$, добијамо:

$$2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right) - \left(a^4+b^4+c^4\right) = 16P^2. \tag{13}$$

Сада из (12) због (13) добијамо тражену неједнакост (10).

Једнакост важи ако је $t_a = t_b = t_c$ и $x = y = z > 0$.

Пример 8. Унутар оштроуглог троугла ABC дата је тачка O. Нека су x, y, z растојања тачке O од страница троугла, а R полупречник круга описаног око троугла ABC. Доказати да важи неједнакост

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leqslant 3\sqrt{\frac{R}{2}}. \tag{14}$$

Решење. Стављајући у Кошијеву неједнакост (1) за $n = 3$ да је $a_1 = \sqrt{ax}$, $a_2 = \sqrt{by}$, $a_3 = \sqrt{cz}$, $b_1 = \sqrt{\dfrac{1}{a}}$, $b_2 = \sqrt{\dfrac{1}{b}}$, $b_3 = \sqrt{\dfrac{1}{c}}$, добијамо

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2 \leqslant (ax+by+cz)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right). \tag{15}$$

Како је $ax + by + cz = 2P$, где је P површина троугла ABC, и $P = \dfrac{abc}{4R}$, имамо из (15):

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2 \leqslant 2P\frac{bc+ca+ab}{abc},$$

тј.

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2 \leqslant \frac{1}{R}(bc+ca+ab). \tag{16}$$

Како је $ab + ac + bc \leqslant a^2 + b^2 + c^2$, то користећи неједнакост ([2], 5.13) која гласи: $a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 9R^2$, добијамо из (16):

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2 \leqslant \frac{1}{2R}\cdot 9R^2,$$

односно

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \leqslant 3\sqrt{\frac{R}{2}}.$$

Овим је (14) доказано. Важи једнакост ако је у питању једнакостранични троугао.

Пример 9. Дат је тетраедар $ABCD$, његове ивице AD, BD, CD су узајамно нормалне, при чему је $|AD| = a, |BD| = b, |CD| = c$. Доказати да сума растојања од A, B, C до праве l, која пролази кроз D и пресеца страну ABC, мања или једнака $\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}$. За који положај праве l важи знак једнакости?

Решење. Нека права l сече страну ABC у тачки M. Нека је $\sphericalangle ADM = \alpha, \sphericalangle BDM = \beta$, $\sphericalangle CDM = \gamma$, а s сума растојања од A, B, C до праве l. Тада је:

$$s = a\sin\alpha + b\sin\beta + c\sin\gamma.$$

Применом Кошијеве неједнакости (1) добијамо:

$$(a\sin\alpha + b\sin\beta + c\sin\gamma)^2 \leqslant (a^2+b^2+c^2)(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma)\,,$$

тј.

$$s^2 \leqslant \sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma}\,.$$

Јасно је да важи $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$; тада је $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$. Следи да је $s \leqslant \sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}$. Једнакост важи ако и само ако је $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$, одакле добијамо:

$$\frac{\sin^2\alpha}{a^2} = \frac{\sin^2\beta}{b^2} = \frac{\sin^2\gamma}{c^2} = \frac{2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Приметимо да су те једнакости могуће у случају када је $a^2 \leqslant b^2+c^2$, $b^2 \leqslant a^2+c^2$, $c^2 \leqslant a^2+b^2$. Тако, једнакост $s = d\sqrt{2}$, где је $d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$, важи онда и само онда када свака од ивица AB, BC и AC тетраедра $ABCD$ није мања од наспрамне ивице и $\sin\alpha = \frac{a\sqrt{2}}{d}$, $\sin\beta = \frac{b\sqrt{2}}{d}$, $\sin\gamma = \frac{c\sqrt{2}}{d}$.

Литература

[1] Ш. З. Арсланагић и Д. Милошевић: *Неки проблеми и напомене о неједнакостима троугла*, Зборник радова, Грађевински факултет Мостар, 2/1988, 56-57.

[2] O. Bottema, R.Ž. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović and P. M. Vasić, *Geometric inequalites*, Wolters Noordhoff, Groningen, 1969.

[3] В. А. Кречмар, *Задачник по алгебре*, Москва, 1964.

[4] О. В. Матуров, Ј. К. Солнцев, Ј. И. Соркин, Н. Г. Федин, *Речник математичких термина са тумачењима*, Научна књига, Београд 1969.

[5] Д. С. Митриновић /сарадник П. М. Васић/, *Аналитичке неједнакости*, Грађевинска књига, Београд 1970.

[6] Е. Г. Моисеев, *Задач М. 1150*, Часопис "Квант" /СССР/ 7 /1989/, 34.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2003/04 година