Републички натпревар 1999

I година

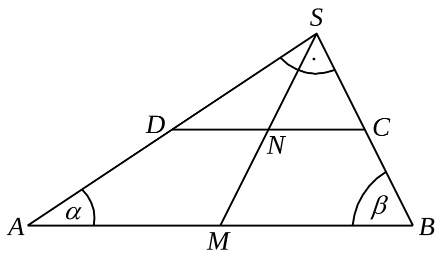
1. Нека a, b и c се природни броеви од кои ниеден не е делив со 5. Докажи дека барем еден од броевите $a^2 - b^2, b^2 - c^2$ и $c^2 - a^2$ е делив со 5.

Решение. Ако бројот x не е делив со 5, тогаш тој е од облик $5k \pm 1$ или $5k \pm 2$, а неговиот квадрат е од облик $5m+1$ или $5m+4$.

Од броевите a^2, b^2, c^2 барем два се од ист облик, па нивната разлика ќе биде делива со 5.

2. Основите на еден трапез се a и b, $(a > b)$, а збирот на аглите при поголемата основа е 90°. Колкава е отсечката чии крајни точки се средините на основите?

Решение. Нека $\overline{AB} = a$ и $\overline{CD} = b$ се основите на трапезот $ABCD$, и нека $\alpha + \beta = 90^\circ$.



Со продолжување на краците AD и BC на трапезот $ABCD$ до нивната пресечна точка S ги добиваме правоаголните триаголници ABS и DCS. Ако M и N се средините на основите AB и CD соодветно, тогаш отсечките SM и SN се тежишни линии на овие правоаголни триаголници, па следува $\overline{SM} = \frac{a}{2}, \overline{SN} = \frac{b}{2}$.

Оттука следува дека $\overline{MN} = \overline{SM} - \overline{SN} = \frac{a-b}{2}$.

3. Дали може во круг со радиус 1 да се сместат извесен број кругови, чиј збир на радиусите е 1999, такви што никои два од нив немаат заеднички внатрешни точки?

Решение. Во внатрешноста на кругот можеме да конструираме квадрат со страна 1. Овој квадрат го делиме на n^2 мали квадратчиња со страна $\frac{1}{n}$. Во секое од овие квадратчиња впишуваме круг со радиус $\frac{1}{2n}$. Тогаш збирот на радиусите на овие кругови е $n^2 \cdot \frac{1}{2n} = \frac{n}{2}$. Од $\frac{n}{2} = 1999$ добиваме $n = 3998$. Значи во кругот со радиус 1 може да се сместат 3998 кругови што не се преклопуваат, чиј збир на радиуси е 1999.

4. Реши го и дискутирај го системот равенки

$$\begin{cases} \frac{x+y}{xy} + \frac{xy}{x+y} = a + \frac{1}{a} \\ \frac{x-y}{xy} + \frac{xy}{x-y} = b + \frac{1}{b} \end{cases}$$

Решение. Со смената

$$\frac{x+y}{xy} = u, \ \frac{x-y}{xy} = v$$

системот го добива видот

$$\begin{cases} u + \frac{1}{u} = a + \frac{1}{a} \\ v + \frac{1}{v} = b + \frac{1}{b} \end{cases} \qquad (a \neq 0, b \neq 0),$$

од каде што $u_1 = a, u_2 = \frac{1}{a}, v_1 = b, v_2 = \frac{1}{b}$.

Дадениот систем е еквивалентен со вкупноста на четирите системи:

$$1^\circ \begin{cases} u = a \\ v = b \end{cases} \qquad 2^\circ \begin{cases} u = a \\ v = \frac{1}{b} \end{cases} \qquad 3^\circ \begin{cases} u = \frac{1}{a} \\ v = b \end{cases} \qquad 4^\circ \begin{cases} u = \frac{1}{a} \\ v = \frac{1}{b} \end{cases}$$

$$1^\circ \begin{cases} \frac{x+y}{xy} = a \\ \frac{x-y}{xy} = b \end{cases} \overset{xy\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = a \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{x} = a - b \\ \frac{2}{y} = a + b \end{cases} \overset{|a|\neq|b|}{\Rightarrow} \begin{cases} x = \frac{2}{a-b} \\ y = \frac{2}{a+b} \end{cases}$$

$$2^\circ \begin{cases} \frac{x+y}{xy} = a \\ \frac{x-y}{xy} = \frac{1}{b} \end{cases} \overset{xy\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = a \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{x} = \frac{ab-1}{b} \\ \frac{2}{y} = \frac{ab+1}{b} \end{cases} \overset{ab\neq\pm 1}{\Rightarrow} \begin{cases} x = \frac{2b}{ab-1} \\ y = \frac{2b}{ab+1} \end{cases}$$

$$3^\circ \begin{cases} \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{a} \\ \frac{x-y}{xy} = b \end{cases} \overset{xy\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{1}{a} \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = b \end{cases} \overset{ab\neq\pm 1}{\Rightarrow} \begin{cases} x = \frac{2a}{1-ab} \\ y = \frac{2a}{1+ab} \end{cases}$$

$$4^\circ \begin{cases} \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{a} \\ \frac{x-y}{xy} = \frac{1}{b} \end{cases} \overset{xy\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{1}{a} \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{b} \end{cases} \overset{|a|\neq|b|}{\Rightarrow} \begin{cases} x = \frac{2ab}{b-a} \\ y = \frac{2ab}{b+a} \end{cases}$$

Добиваме дека:

(i) Ако $|a| \neq |b|$ и $(\frac{2b}{ab-1}, \frac{2b}{ab+1})$ системот има четири решенија: $(\frac{2}{a-b}, \frac{2}{a+b})$, $(\frac{2b}{ab-1}, \frac{2b}{ab+1})$, $(\frac{2a}{1-ab}, \frac{2a}{1+ab})$ и $(\frac{2ab}{b-a}, \frac{2ab}{b+a})$.

(ii) Ако $ab \neq \pm 1$, тогаш системот има две решенија: $(\frac{2a}{1-ab}, \frac{2a}{1+ab})$ и $(\frac{2b}{ab-1}, \frac{2b}{ab+1})$.

(iii) Ако $|a| \neq |b|$, тогаш системот има две решенија: $(\frac{2}{a-b}, \frac{2}{a+b})$ и $(\frac{2ab}{b-a}, \frac{2ab}{b+a})$.

(iv) Ако $|a| = |b|$ или $ab = \pm 1$, системот нема решене.

II година

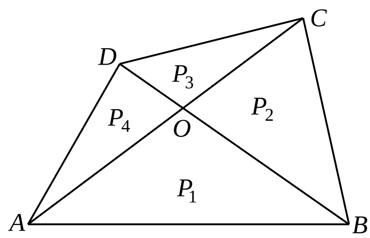
1. Реши ја во $\mathbb{R}$ равенката $2x^2-3x=2x\sqrt{x^2-3x}+1$.

Решение. $x^2+(x^2-3x)=2x\sqrt{x^2-3x}+1$. Ако ставиме $x^2-3x=y^2$, добиваме $x^2+y^2=2xy+1$, односно $(x-y)^2=1$. Оттука добиваме $x-y=\pm1$, т.е. $x-1=\sqrt{x^2-3x}$ или $x+1=\sqrt{x^2-3x}$. Првата равенка нема решение, а решението на втората равенка е $-\frac{1}{5}$.

2. Ако производот на плоштините на триаголниците, на кои еден конвексен четириаголник е разбиен со една од своите дијагонали, е еднаков на производот од плоштините на триаголниците, кои се добиваат со разбивање на другата дијагонала, тогаш четириаголникот е трапез или е паралелограм. Докажи!

Решение. Нека дијагоналите на конвексниот четириаголник $ABCD$ се сечат во точката O и нека

$P_1=P_{ABO}, P_2=P_{BCO}, P_3=P_{CDO}, P_4=P_{ADO}$.



Од условот на задачата имаме:

$$(P_1+P_2)(P_3+P_4)=(P_1+P_4)(P_2+P_3).$$

Оттука добиваме $(P_1-P_3)(P_2-P_4)=0$, па следува:

(i) Ако $P_1=P_3$, тогаш $P_1+P_4=P_3+P_4$, т.е. $P_{ABD}=P_{ACD}$. Но, триаголниците ABD и ACD имаат заедничка страна AD, следува дека висините кон оваа страна имаат еднаква должина, т.е. точките B и C се еднакво оддалечени од AD. Значи $AD\parallel BC$, па овој четириаголник е трапез.

(ii) Ако $P_2=P_4$, тогаш $P_{ABC}=P_{ABD}$, па аналогно заклучуваме дека $AB\parallel CD$, т.е. четириаголникот $ABCD$ е трапез.

(iii) Ако $P_1=P_3$ и $P_2=P_4$, следува дека $AD\parallel BC$ и $AB\parallel CD$, т.е. четириаголникот $ABCD$ е паралелограм.

3. Докажи дека равенката

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=30,$$

нема решение во множеството на целите броеви.

Решение. Нека $a=x-y,\ b=y-z,\ c=z-x$. Тогаш $a+b+c=0$ и:

$$\begin{aligned}30&=a^3+b^3+c^3=a^3+b^3+(-a-b)^3\\&=-3a^2b-3ab^2=-3ab(a+b)=3abc\end{aligned}.$$

Дадената равенка се сведува на системот

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ abc=10 \end{cases}$$

Оттука следува дека $a,b,c \in \{\pm1, \pm2, \pm5, \pm10\}$. Без губење од општоста може да предпоставиме дека $|a| \geq |b| \geq |c|$, па оттука лесно се гледа дека системот нема решение во множеството на целите броеви.

4. Нека S е подмножество од реалните броеви за кое важат следниве услови:

(i) $\quad Z \subseteq S$

(ii) $\quad \sqrt{2}+\sqrt{3} \in S$

(iii) $\quad x, y \in S \Rightarrow x+y \in S, \, xy \in S$

Докажи дека $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \in S$.

Решение. Нека $a=\sqrt{2}+\sqrt{3}$. Тогаш $a^2=5+2\sqrt{6}$, т.е. $(a^2-5)^2=24$. Оттука добиваме $a(10a-a^3)=1$, односно $\frac{1}{a}=10a-a^3$. $a \in S, \, 10 \in S$, па од условот (iii) следува дека $10a \in S$. $a \in S$ тогаш од (iii) следува $aa \in S$, и повторно со примена на (iii) добиваме $a^3=aaa \in S$. $-1 \in S, \, a^3 \in S$, па од (iii) следува $-a^3 \in S$. Од $10a \in S$ и $-a^3 \in S$ со примена на (iii) добиваме $10a-a^3 \in S$, односно $\frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \in S$.

III година

1. Реши ја равенката

$$\sin^2 x+\sin 2x \sin 4x+\sin 3x \sin 9x+\ldots+\sin nx \sin n^2 x=1.$$

Решение. Користејќи ја формулата

$$\sin\alpha\sin\beta=\tfrac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$$

дадената равенка го добива видот:

$$\tfrac{1}{2}\left[\cos 2x-\cos 6x+\cos 6x-\cos 12x+\ldots+\cos n(n-1)x-\cos n(n+1)x\right]=1-\sin^2 x,$$

т.е.

$$\cos n(n+1)x=-1,$$

а оттука добиваме $n(n+1)x=(2k+1)\pi$, т.е. $x=\frac{2k+1}{n(n+1)}\pi, \quad k \in Z$.

2. Основата на кружен конус лежи во рамнината π, а врвот S во рамнината $\Sigma \parallel \pi$. Аголот при врвот на конусот е 2α. Низ средината M на неговата висина OS е повлечена права p, која со OS зафаќа агол β. Одреди ја должината на отсечката

AB, од правата p, која минува низ конусот, ако отсечката CD од правата p, зафатена меѓу рамнините π и Σ, има должина d.

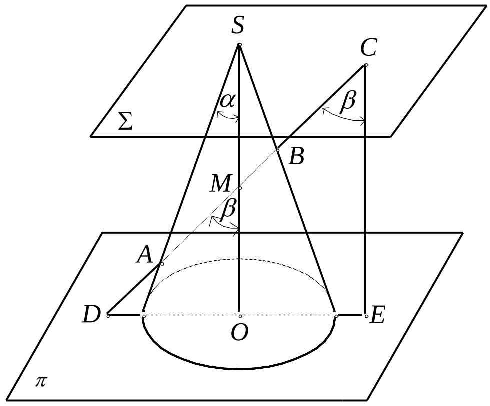
Решение. Според ознаките на цртежот имаме:

$\overline{CD}=d,\ \measuredangle OSA=\alpha,\ \measuredangle OMA=\beta.$

Нека $CE\perp\pi$, тогаш $\measuredangle DCE=\beta$, па

$\overline{CE}=d\cdot\cos\beta$.

$\overline{SM}=\frac{1}{2}\overline{SO}=\frac{1}{2}\overline{CE}=\frac{1}{2}d\cos\beta$.



Според синусната теорема за $\triangle ASM$ наоѓаме:

$$\overline{AS}=\frac{\overline{SM}\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}=\frac{d}{2}\cdot\frac{\cos\beta\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}=\frac{d\sin2\beta}{4\sin(\beta-\alpha)}$$

Слично, од $\triangle ABS$ добиваме

$$\frac{\overline{AB}}{\sin2\alpha}=\frac{\overline{AS}}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Конечно, $\overline{AB}=\frac{d\sin2\alpha\ \sin2\beta}{4\sin(\alpha+\beta)\ \sin(\beta-\alpha)}$.

3. Докажи дека

$$1+\frac{2}{2\cdot3\cdot4}+\frac{2}{5\cdot6\cdot7}+\ldots+\frac{2}{1997\cdot1998\cdot1999}=\frac{1}{667}+\frac{1}{668}+\ldots+\frac{1}{1999}.$$

Решение.За $n>1$ забележуваме дека важи

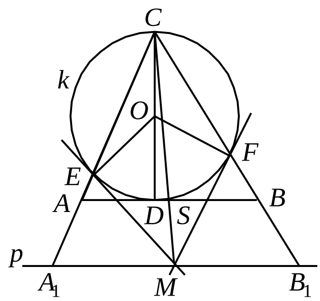
$$\frac{2}{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{3}{n}.$$

Тогаш

$$\begin{aligned}
&1+\frac{2}{2\cdot3\cdot4}+\frac{2}{5\cdot6\cdot7}+\ldots+\frac{2}{1997\cdot1998\cdot1999}=\\
&=1+(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{3}{3})+(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}-\tfrac{3}{6})+(\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{10}-\tfrac{3}{9})+\ldots\\
&\quad+(\tfrac{1}{11}+\tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{13}-\tfrac{3}{12})+\ldots+(\tfrac{1}{1997}+\tfrac{1}{1998}+\tfrac{1}{1999}-\tfrac{3}{1998})=\\
&=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\ldots+\tfrac{1}{666}+\tfrac{1}{667}+\ldots+\tfrac{1}{1998}+\tfrac{1}{1999}-1-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}-\ldots-\tfrac{1}{666}=\\
&=\tfrac{1}{667}+\tfrac{1}{668}+\ldots+\tfrac{1}{1999}.
\end{aligned}$$

4. Во рамнината на остроаголниот триаголник $ABC,$ над неговата висина CD, како над дијаметар, е конструирана кружница $k,$ која ги сече страните AC и BC во точките E и F соодветно. Докажи дека пресечната точка M на тангентите, повлечени на кружницата k во точките E и F лежи на правата определена со тежишната линија на триаголникот ABC повлечена од темето C.

Решение. Низ M повлекуваме права $p\parallel AB$. Нека A_1 и B_1 се пресечните точки на p со CA и CB соодветно. Доволно е да докажеме дека $\overline{A_1M}=\overline{MB_1}$.



Нека аглите кај темињата A, B и C на триаголникот ABC ги означиме со α, β и γ соодветно. Тогаш $\measuredangle BCD = \beta' = 90^\circ - \beta$. Бидејќи ΔFCO е рамнокрак, следува дека $\measuredangle CFO = \beta'$, а бидејќи $\measuredangle OFM = 90^\circ$, добиваме дека $\measuredangle BFM = 180^\circ - 90^\circ - \beta' = \beta$. Бидејќи $\measuredangle MB_1F = \beta$ (по конструкција), следува дека $\triangle B_1FM$ е рамнокрак, т.е. $\overline{B_1M} = \overline{MF}$. Слично се докажува дека $\overline{A_1M} = \overline{ME}$. Но, $\overline{MF} = \overline{ME}$ како тангентни отсечки, па следува дека $\overline{A_1M} = \overline{MB_1}$.

Од тоа што M е средина на A_1B_1 и $AB \parallel A_1B_2$, следува дека правата CM минува низ средината S на отсечката AB, т.е. се совпаѓа со тежишната линија повлечена од темето C.

IV година

1. Да се најде природниот број n ако десеттиот член во развојот на биномот $(\frac{1}{5}x + \frac{2}{5})^n$ има најголем коефициент.

Решение. $k-$тиот член е $a^k = \binom{n}{k}(\frac{2}{5})^k \frac{1}{5^{n-k}} = \binom{n}{k}\frac{2^k}{5^n}$. Бидејќи десеттиот член има најголем коефициент, следува дека $a_8 < a_9$ и $a_{10} < a_9$. Следува:

$$\binom{n}{8}\frac{2^8}{5^n} < \binom{n}{9}\frac{2^9}{5^n} \text{ и } \binom{n}{10}\frac{2^{10}}{5^n} < \binom{n}{9}\frac{2^9}{5^n}$$

а оттука добиваме дека $n > 12,5$ и $n < 14$. Значи, бараниот природен број е $n = 13$.

2. Низата (a_n) е зададена со:

(i) $\quad a_1 = 1$

(ii) $\quad (\forall n \in N)\, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{[a_n]}$

За кои вредности на n важи $a_n > 20$? ($[x]$ е најголемиот цел број помал или еднаков од x.)

Решение. Првите неколку членови на низата се:

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 1 + \frac{1}{2}, a_4 = 3, a_5 = 3 + \frac{1}{3}, a_6 = 3 + \frac{2}{3}, a_7 = 4, \ldots$$

Го забележуваме следното правило: низата монотоно расте и нејзините членови го имаат обликот $m + \frac{k}{m}, 0 \le k \le m-1.$ Да докажеме дека тоа навистина е така. За $n = 1$ тврдењето е точно. Нека $a_n = m + \frac{k}{m}, 0 \le k \le m-1.$

Тогаш

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{[a_n]} = m + \frac{k}{m} + \frac{1}{m} = m + \frac{k+1}{m}, \quad a_{n+1} = m+1 \text{ ако } k = m-1.$$

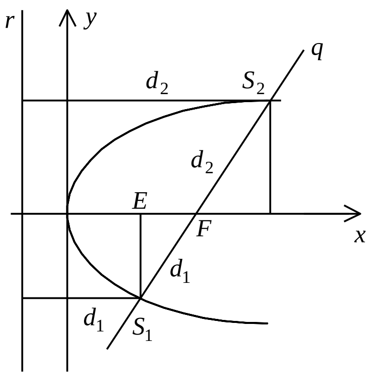
Значи, еден член од низата има цел дел 1, два члена имаат цел дел 2, три члена имаат цел дел 3, итн. Цел дел не поголем од 19 имаат $1+2+3+\dots+19=190$ членови од низата. Тогаш $a_{191}=20$. Значи $a_n > 20$ ако $n>191$.

3. Исто како третата задача за трета година.

4. Нека q е произволна права низ фокусот F на параболата $y^2 = 2px$, а S_1 и S_2 се пресечните точки на правата q и параболата. Докажи дека

$$\frac{1}{\overline{FS_1}} + \frac{1}{\overline{FS_2}} = \frac{2}{p}.$$

Решение. Секоја точка од параболата се наоѓа на еднакво растојание од фокусот F и од директрисата (правата r). Растојанието меѓу фокусот и директрисата е p. Со E и G ќе ги означиме проекциите на S_1 и S_2 соодветно на x - оската.



Ако

$$\overline{FS_1} = d_1 \text{ и } \overline{FS_2} = d_2,$$

тогаш

$$\overline{FE} = p - d_1, \quad \overline{FG} = d_2 - p.$$

Од сличноста на триаголниците FES_1 и FGS_2 следува $\frac{p-d_1}{d_1} = \frac{d_2-p}{d_2}$, а оттука $\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}=\frac{2}{p}$, односно $\frac{1}{\overline{FS_1}} + \frac{1}{\overline{FS_2}} = \frac{2}{p}$.