

Регионален натпревар 2017

I година

1AB. Ако $a, b \in \mathbb{N}$, тогаш барем еден од броевите $a+b$, $a-b$, ab е делив со 3. Докажи!

Решение. Според тоа какви остатоци може да даваат броевите $a, b \in \mathbb{N}$ при делење со 3 ќе ги разгледаме следниве случаи:

1) Ако барем едниот од a, b е делив со 3, тогаш нивниот производ ab е делив со 3.

2) Ако и двата броја a, b при делење со 3 даваат ист ненулта остаток, тогаш нивната разлика $a-b$ е делива со 3, т.е.

- ако $a = 3m+1$ и $b = 3n+1$, тогаш $a-b = 3(m-n)$,

- ако $a = 3m+2$ и $b = 3n+2$, тогаш $a-b = 3(m-n)$.

Во двата случаи $3|a-b$.

3) Ако двата броја a, b при делење со 3 даваат различни ненулта остатоци, тогаш нивниот збир $a+b$ е делив со 3, т.е.

- ако $a = 3m+1$ и $b = 3n+2$, тогаш $a+b = 3(m+n+1)$,

- ако $a = 3m+2$ и $b = 3n+1$, тогаш $a+b = 3(m+n+1)$.

Во двата случаи $3|a-b$.

2AB. За природните броеви a, b, c и d е исполнето равенството $ab = cd$. Дали може бројот $a+b+c+d$ да биде прост?

Решение. Од условот на задачата имаме дека $\frac{ab}{c}$ е природен број. Постојат природни броеви $m, n, x, y \in \mathbb{N}$ такви што $c = mn, a = mx, b = ny$. Но, тогаш

$$d = \frac{ab}{c} = \frac{mx \cdot ny}{mn} = xy,$$

од каде што добиваме

$$\begin{aligned} a+b+c+d &= mx+ny+mn+xy \\ &= m(n+x)+y(n+x) \\ &= (n+x)(m+y). \end{aligned}$$

Бидејќи $m, n, x, y \in \mathbb{N}$ добиваме дека $m+y, n+x \geq 2$ па според тоа $(n+x)(m+y)$ е сложен број.

3A. Докажи дека ако

$$x+y+z = x^2+y^2+z^2 = x^3+y^3+z^3 = 1$$

тогаш $xyz = 0$.

Решение. Дадени се равенствата

$$x + y + z = 1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1$$

Ако го квадрираме првото равенство, имаме $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 1$ и ако го одземеме второто равенство, добиваме: $xy + xz + yz = 0$. Ако пак ги помножиме првото и второто равенство, а потоа ги искористиме првото и претходното равенство последователно добиваме

$$x^3 + y^3 + z^3 + (x + y)xy + (x + z)xz + (y + z)yz = 1$$

$$1 + (1 - z)xy + (1 - y)xz + (1 - x)yz = 1$$

$$xy + yz + zx - 3xyz = 0$$

$$0 - 3xyz = 0$$

$$xyz = 0$$

3В. Даден е четириаголник $ABCD$. Нека O е пресечна точка на дијагоналите во четириаголник $ABCD$, $\angle OCB = \angle ODA = 30^\circ$, $\angle OBA = 50^\circ$ и $\angle AOB = 70^\circ$. Определи ги ги агли на четириаголникот.

Решение. Од $\angle OCB = \angle ODA = 30^\circ$ следува дека четириаголникот $ABCD$ е тетивен. Според тоа, $\angle ACD = \angle ABD = 50^\circ$ како агли над AD . Понатаму,

$$\angle BAO = 180^\circ - \angle AOB - \angle OBA = 60^\circ$$

$$\angle BDC = \angle BAC = 60^\circ.$$

Добиваме

$$\angle CDA = \angle CDO + \angle ODA = 90^\circ$$

$$\angle ABC = 180^\circ - \angle ADC = 90^\circ$$

$$\angle BAD = 180^\circ - \angle BCD = 100^\circ.$$

4А. Даден е остроаголен триаголник ABC со ортоцентар H . Докажи дека

$$\overline{AH} \cdot h_a + \overline{BH} \cdot h_b + \overline{CH} \cdot h_c = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

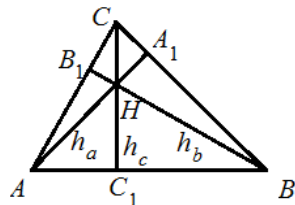
Решение. Од сличноста на триаголниците AB_1H

и AA_1C добиваме $\overline{AB_1} \cdot \overline{AC} = \overline{AH} \cdot \overline{AA_1}$ или

$$\overline{AB_1} \cdot b = \overline{AH} \cdot h_a. \quad (1)$$

Од сличноста на триаголниците CB_1H и CC_1A добиваме

$$\overline{CB_1} \cdot b = \overline{CH} \cdot h_a \quad (2)$$



Со собирање на (1) и (2) добиваме $b(\overline{AB_1} + \overline{CB_1}) = \overline{AH} \cdot h_a + \overline{CH} \cdot h_c$ односно,

$$b^2 = \overline{AH} \cdot h_a + \overline{CH} \cdot h_c \quad (3)$$

Аналогно, за другите две страни

$$a^2 = \overline{BH} \cdot h_b + \overline{CH} \cdot h_c \quad (4)$$

$$c^2 = \overline{AH} \cdot h_a + \overline{BH} \cdot h_b \quad (5)$$

Со собирање на (3), (4) и (5) се добива бараното равенство.

4В. Дадени се три картончиња. На едното е запишан бројот 19, на другото бројот 97, а на третото некој двоцифрен број. Ако ги собереме сите шестцифрени броеви, кои се добиваат со подредување на картончињата во ред, го добиваме бројот 3232320. Кој број е запишан на третото картонче?

Решение. *Прв начин.* Нека x е двоцифрениот број запишан на третото картонче. Постојат шест можности на подредување на трите картончиња ред и при тоа се добиваат броевите:

$$\overline{1997x}, \overline{19x97}, \overline{x1997}, \overline{9719x}, \overline{97x19}, \overline{x9719}.$$

За нивниот збир добиваме:

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot 19(10000 + 100 + 1) + 2 \cdot 97(10000 + 100 + 1) + 2x(10000 + 100 + 1) \\ &= 20202(19 + 97 + x). \end{aligned}$$

Од условот $S = 3232320$ наоѓаме:

$$19 + 97 + x = 160 \Rightarrow x = 44.$$

Следствено, на третото картонче е запишан бројот 44.

Втор начин. Нека $\overline{ab}$ е двоцифрениот број запишан на третото картонче. Постојат шест можности на подредување на трите картончиња во ред и при тоа се добиваат броевите:

$$\overline{1997ab}, \overline{19ab97}, \overline{ab1997}, \overline{9719ab}, \overline{97ab19}, \overline{ab9719}.$$

За нивниот збир добиваме:

$$\begin{aligned} S &= 1 \cdot 202020 + 9 \cdot 222222 + 7 \cdot 20202 + a \cdot 202020 + b \cdot 20202 \\ 2343432 + a \cdot 202020 + b \cdot 20202 &= 3232320 \\ (10a + b) \cdot 20202 &= 888888 \\ 10a + b &= 44 \\ \overline{ab} &= 44. \end{aligned}$$

Следствено, на третото картонче е запишан бројот 44.

II година

1АВ. За кои вредности на параметарот a , системот линеарни равенки

$$\begin{cases} 3x + ny = 3 \\ 2x - 4y = 1 \end{cases},$$

има решение што ги исполнува условите $x > 0$ и $y < 0$?

Решение. Прво го решаваме системот равенки. Од втората равенка $x = \frac{1+4y}{2}$. Заменуваме во првата равенка, $\frac{3}{2}(1+4y) + ny = 3$, и добиваме $3+12y+2ny=6$; $2(n+6)y=3$ т.е. $(n+6)y = \frac{3}{2}$. Ако $n = -6$, добиваме $0 = \frac{3}{2}$, па системот нема решение. Ако $n \neq -6$, следува $y = \frac{3}{2(n+6)}$ од каде $x = \frac{1}{2}(1+4 \cdot \frac{3}{2(n+6)}) = \frac{n+12}{n+6}$. Значи за $n \neq -6$ решение е парот $(\frac{n+12}{n+6}, \frac{3}{2(n+6)})$. Од условот на задачата треба да важи системот неравенки $\frac{n+12}{n+6} > 0$ и $\frac{3}{2(n+6)} < 0$. Од втората неравенка добиваме $n+6 < 0$ т.е. $n < -6$. Но, тогаш $\frac{n+12}{n+6} > 0$ ако и само ако $n+12 < 0$ т.е. $n < -12$. Оттука, решението на системот неравенки е $(-\infty, -12)$. Следува $n \in (-\infty, -12)$.

2AB. Нека a и b се ненулти броеви, такви што равенката

$$a(x-a)^2 + b(x-b)^2 = 0$$

има единствено решение. Докажи дека $|a| = |b|$.

Решение. *Прв начин.* Ќе претпоставиме спротивно, т.е. $|a| \neq |b|$. Тогаш од својствата на апсолутни вредности имаме $a \neq \pm b$, т.е. $a \neq b$ и $a \neq -b$. Бидејќи $a+b \neq 0, a-b \neq 0$, равенката можеме да ја запишеме во облик

$$(a+b)x^2 - 2(a^2+b^2)x + a^3+b^3 = 0$$

За дискриминантата D на равенката имаме

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (a^2+b^2)^2 - (a+b)(a^3+b^3) \\ &= a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^4 - ab^3 - ba^3 - b^4 \\ &= -ab(a^2 - 2ab + b^2) = -ab(a-b)^2. \end{aligned}$$

Од претпоставката имаме $\frac{D}{4} \neq 0$, бидејќи $a, b, a-b \neq 0$. Според тоа, равенката нема единствено решение, што противречи на условот на задачата.

Конечно, заради добиената контрадикција имаме $|a| = |b|$.

Втор начин. Ќе разгледаме два случаи.

Случај 1. a и b се со ист знак.

а) $a, b > 0$. Во тој случај $a(x-a)^2 \geq 0$, $b(x-b)^2 \geq 0$, па равенството ќе биде исполнето ако $x \in \mathbb{R}$ е таков што $a(x-a)^2 + b(x-b)^2 = 0$, а тоа е можно ако и само ако $x = a$ и $x = b$, т.е. $a = b$, што и требаше да се докаже.

б) $a, b < 0$. Во овој случај $a = -|a|$ и $b = -|b|$, па равенката го добива обликот $-|a|(x-a)^2 + (-|b|)(x-b)^2 = 0$, т.е. $|a|(x-a)^2 + |b|(x-b)^2 = 0$. Понатаму овој подслучај се разгледува како и првиот подслучај од овој случај, при што се добива $a = b$.

Случај 2. a и b се со различен знак. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a > 0$ и $b < 0$. Постојат позитивни реални броеви c и d такви што $a = c^2$ и $b = -d^2$. Во тој случај равенката го добива обликот

$$\begin{aligned} 0 &= a(x-a)^2 + b(x-b)^2 \\ &= c^2(x-a)^2 - d^2(x-b)^2 \\ &= (c(x-a))^2 - (d(x-b))^2 \\ &= (c(x-a) - d(x-b))(c(x-a) + d(x-b)) \\ &= ((c-d)x - (ac-bd))((c+d)x - (ac+bd)). \end{aligned}$$

Ако $c \neq d$ равенката има две различни решенија, т.е. два различни корени, и тоа

$$x_1 = \frac{ac-bd}{c-d} = \frac{c^3+d^3}{c-d} \text{ и } x_2 = \frac{ac+bd}{c+d} = \frac{c^3-d^3}{c+d}.$$

Да забележиме дека $|x_1| > |x_2|$, бидејќи $|c^3+d^3| > |c^3-d^3|$ и $|c-d| < |c+d|$. Значи, за да е исполнет условот од задачата, т.е. равенката да има едно единствено решение, мора $c = d$, од каде што пак се добива $b = -a$, што и требаше да се докаже.

3A. Во правоаголниот триаголник ABC со прав агол при темето C , се конструирани висината CD , симетралата CL на аголот ACB и симетралите DK и DN на аглиите ADC и BDC . Притоа $D, L \in AB$, $K \in AC$ и $N \in BC$. Докажи дека точките C, K, L, D и N лежат на иста кружница. Докажи дека $\overline{KN} = \overline{CL}$.

Решение. Бидејќи $\angle ACB = 90^\circ$ и $\angle KDN = \angle KDC + \angle CDN = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$, следува четириаголникот $CKDN$ е тетивен т.е. околу него може да се опише кружница k . Нека $AB \cap k = \{D, L'\}$. Нека $\angle BAC = \alpha$, тогаш од сличноста на триаголниците ADC и CDB , следува

$$\angle DCB = \angle BAC = \alpha.$$

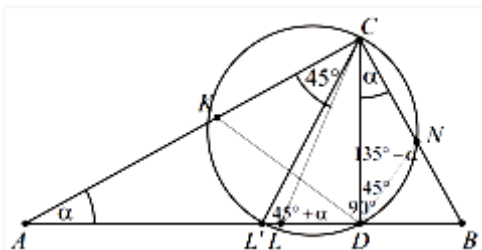
Заради $\angle CDN = 45^\circ$ од $\triangle CDN$

следува дека $\angle DNC = 135^\circ - \alpha$. Бидејќи $CL'DN$ е тетивен четириаголник, важи

$$\angle CL'B = 180^\circ - \angle DNC = 180^\circ - (135^\circ - \alpha) = 45^\circ + \alpha \quad (1)$$

Од друга страна, $\angle ACL = 45^\circ$, бидејќи CL е симетрала на прав агол. Оттука,

$$\angle CLB = 45^\circ + \alpha \quad (2),$$



како надворешен агол за триаголникот ALC . Од (1) и (2) следува дека $L' \equiv L$, т.е. точките C , K , L , D и N лежат на k . Притоа $\overline{KN}$ и $\overline{CL}$ се дијаметри во опишаната кружница k , бидејќи тетивните агли над нив се прави, па $\overline{KN} = \overline{CL}$.

4А. Најди ги сите реални броеви a и b , $b > 0$, така што корените на дадените равенки $x^2 + ax + a = b$ и $x^2 + ax + a = -b$ се четири последователни цели броеви.

Решение. Нека x_1, x_2 и x_3, x_4 се корените на првата и втората равенка, соодветно. Тогаш, од Виетовите врски имаме дека збирот на корените е еднаков на $-2a$, а од тоа што се четири последователни цели броеви, важи

$$x + x + 1 + x + 2 + x + 3 = -2a$$

$$4x + 6 = -2a$$

$$x = -\frac{a+3}{2}$$

па четирите корени на дадените равенки се $-\frac{a+3}{2}$, $-\frac{a+1}{2}$, $-\frac{a-1}{2}$ и $-\frac{a-3}{2}$. Имаме, $x_{1,2} = -\frac{a+3}{2}$ и $x_{3,4} = -\frac{a-1}{2}$, или обратно. Повторно ги користиме Виетовите врски и добиваме:

$$x_1x_2 + x_3x_4 = (a-b) + (a+b)$$

$$\left(-\frac{a+3}{2}\right)\left(-\frac{a-3}{2}\right) + \left(-\frac{a+1}{2}\right)\left(-\frac{a-1}{2}\right) = 2a,$$

$$a^2 - 4a - 5 = 0$$

т.е. $a = -1$ или $a = 5$.

За $a = -1$ корените се $-1, 0, 1, 2$ и $b = 1$. За $a = 5$ корените се $-4, -3, -2, -1$ и $b = 1$. Значи бараните броеви се $a = -1$ и $b = 1$ или $a = 5$ и $b = 5$.

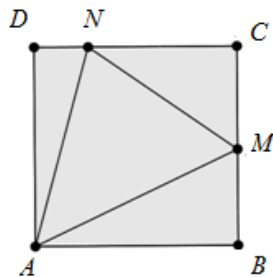
3В. Дадени се точките M и N на страните BD и CD , соодветно, на квадратот $ABCD$ така што збирот на плоштините на триаголниците ABM и AND е еднаков со плоштината на триаголникот NMC . Ако $\overline{DN} = 3$ и $\overline{BM} = 5$, колкава е плоштината на триаголникот AMN ?

Решение. Нека страната на квадратот е a . Тогаш за плоштината на триаголникот ABM имаме $P_1 = \frac{a \cdot \overline{BM}}{2} = \frac{5a}{2}$, за плоштината на триаголникот AND имаме $P_2 = \frac{a \cdot \overline{DN}}{2} = \frac{3a}{2}$ и за плоштината на триаголникот NMC добиваме

$$P_3 = \frac{\overline{NC} \cdot \overline{MC}}{2} = \frac{(a-3)(a-5)}{2}.$$

Според условот во задачата, $P_1 + P_2 = P_3$, па важи

$8a = (a-3)(a-5)$ и оттука ја добиваме равенката $a^2 - 16a + 15 = 0$. Нејзини



решенија се 1 и 15, но страната на квадратот, според условите, не може да е 1. Значи, $a=15$ и за плоштината на триаголникот AMN добиваме:

$$P = 15^2 - 2 \cdot \frac{12 \cdot 10}{2} = 225 - 120 = 105.$$

4B. Реши го системот равенки во множеството реални броеви:

$$\begin{cases} x(\frac{1}{2} + y - 2x^2) = 0 \\ y(\frac{5}{2} + x - y) = 0 \end{cases}.$$

Решение. Можни се следниве случаи:

$$\begin{array}{ll} 1. \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} & \text{или} \quad 2. \begin{cases} x = 0 \\ \frac{5}{2} + x - y = 0 \end{cases} \quad \text{или} \\ 3. \begin{cases} \frac{1}{2} + y - 2x^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} & \text{или} \quad 4. \begin{cases} \frac{1}{2} + y - 2x^2 = 0 \\ \frac{5}{2} + x - y = 0 \end{cases} \end{array}$$

Од првиот случај го добиваме решението $(0, 0)$.

Од вториот случај имаме $x = 0$ и $y = \frac{5}{2}$, т.е. го добиваме решението $(0, \frac{5}{2})$.

Од третот случај имаме $y = 0$ и $2x^2 = \frac{1}{2}$, од каде $x = \pm \frac{1}{2}$. Решенија се $(-\frac{1}{2}, 0)$ и $(\frac{1}{2}, 0)$.

Од четвртиот случај имаме $y = \frac{5}{2} + x$ и со замена во другата равенка ја добиваме квадратната равенка $2x^2 - x - 3 = 0$, чии што решенија се -1 и $\frac{3}{2}$. Решенија се $(-1, \frac{3}{2})$ и $(\frac{3}{2}, 4)$.

Конечно, множеството решенија на системот е

$$\{(0, 0), (0, \frac{5}{2}), (-\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, 0), (-1, \frac{3}{2}), (\frac{3}{2}, 4)\}.$$

III година

1AB. Реши ја равенката $\sin 2x + \cos(x + y) = 2$.

Решение. Бидејќи $\sin 2x \leq 1$ и $\cos(x + y) \leq 1$, за секои реални броеви x, y , следува дека равенството е можно само во случај кога $\sin 2x = 1$ и $\cos(x + y) = 1$. Така го добиваме системот

$$\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x + y = 2m\pi \end{cases} \text{ за } k, m \in \mathbb{Z},$$

од каде $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ и $y = (2m - k)\pi - \frac{\pi}{4}$, за $k, m \in \mathbb{Z}$.

2AB. Докажи дека производот на корените на равенката

$$x^{\log_{2016} x} \sqrt{2016} = x^{2016},$$

е природен број. Која е последната цифра на тој број?

Решение. Ако дадената равенка ја логаритмираме со логаритам со основа 2016, последователно добиваме

$$\log_{2016}[x^{\log_{2016} x} \sqrt{2016}] = \log_{2016} x^{2016}$$

$$(\log_{2016} x)^2 + \frac{1}{2} = 2016(\log_{2016} x).$$

Ако воведеме смена $t = \log_{2016} x$, ја добиваме равенката $t^2 - 2016t + \frac{1}{2} = 0$. Според Виетовите правила, за збирот на корените t_1 и t_2 на последната равенка е исполнето $t_1 + t_2 = 2016$. Во тој случај решенија на почетната равенка се $x_1 = 2016^{t_1}$ и $x_2 = 2016^{t_2}$, а за нивниот производ добиваме

$$x_1 x_2 = 2016^{t_1} 2016^{t_2} = 2016^{t_1+t_2} = 2016^{2016},$$

кој е природен број.

Јасно, последната цифра на бројот 2016^{2016} е 6.

3A. Во множествотореални броеви реши ја неравенската

$$\sqrt{x^2 - x - 12} > 7x.$$

Решение. Неопходно е прво да ја определиме дефиниционата област во која квадратниот корен е дефиниран, односно множеството во кое $x^2 - x - 12 \geq 0$. Ова е еквивалентно со $(x - 4)(x + 3) \geq 0$, од каде $x \in (-\infty, -3] \cup [4, +\infty)$.

Ќе разгледаме два случаи, за $x < 0$ и за $x \geq 0$. Во случај кога $x < 0$, неравенството $\sqrt{x^2 - x - 12} > 7x$ важи за секој x за кој коренот е дефиниран, односно на дефиниционата област. Тогаш секој $x \in (-\infty, -3]$ е решение на почетната неравенката. За $x \geq 0$, можеме да го квадрираме неравенството, па добиваме неравенка $x^2 - x - 12 > 49x^2 \Leftrightarrow 48x^2 + x + 12 < 0$. Но еквивалентната неравенка нема реални решенија. Конечно, решенија на почетната неравенката се сите $x \in (-\infty, -3]$.

3Б. Реши ја неравенката

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-|x-3| + \frac{1}{|x-3|}} = 4.$$

Решение. Користејќи ги својствата на степените последователно добиваме

$$2^{|x-3| + \frac{1}{|x-3|}} = 2^2$$

$$|x-3| + \frac{1}{|x-3|} = 2$$

$$|x-3|^2 - 2|x-3| + 1 = 0$$

$$(|x-3|-1)^2 = 0$$

од каде $|x-3|=1$, односно $x=4$ или $x=2$.

4А. Даден е паралелограм $ABCD$. Симетралата на $\angle DAB$ ја сече страната DC во точка L , а дијагоналата BD во точка K , таква да $\overline{DK} : \overline{KB} = 3 : 4$. Пресметај ја должината на отсечката LC , ако периметарот на паралелограмот е 28.

Решение. Бидејќи AL е симетрала на аголот $\angle DAB$ имаме $\angle DAL = \angle LAB = \angle ALD$, па $\triangle ALD$ е рамнокрак. Да означиме $\overline{DL} = \overline{AD} = b$ и $\overline{AB} = \overline{DC} = a$. За плоштините на триаголниците на цртежот имаме

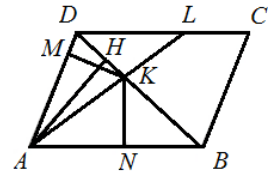
$$P_{\triangle AKD} : P_{\triangle ABK} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{MK}}{2} : \frac{\overline{AB} \cdot \overline{NK}}{2} = \overline{AD} : \overline{AB} = b : a,$$

каде $\overline{MK}, \overline{NK}$ се соодветните висини спуштени кон страните и за нив важи $\overline{MK} = \overline{NK}$ затоа што точката K , како точка од симетралата на $\angle DAB$ е подеднакво оддалечена од краците на аголот.

Од друга страна,

$$P_{\triangle AKD} : P_{\triangle ABK} = \frac{\overline{DK} \cdot \overline{AH}}{2} : \frac{\overline{BK} \cdot \overline{AH}}{2} = \overline{DK} : \overline{KB} = 3 : 4.$$

Сега, изедначувајќи ги односите на плоштините добиваме $\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$, а од периметарот на паралелограмот $2(a+b) = 28$, имаме $b=6, a=8$. Конечно, $\overline{LC} = a-b = 2$.



4Б. Нека a, b, c и d се должините на последователни страни на еден конвексен четириаголник со плоштина P . Докажи дека важи неравенството

$$P \leq \frac{1}{4}(a+c)(b+d).$$

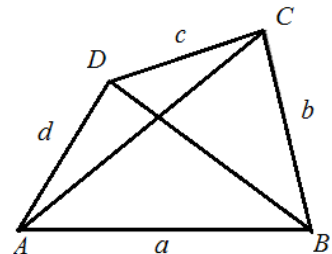
Решение. Нека со $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ги означиме аглите при темињата A, B, C, D на конвексниот четириаголникот $ABCD$ и нека $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b, \overline{CD} = c$ и $\overline{DA} = d$. Имаме

$$\begin{aligned} P &= P_{ABC} + P_{ACD} = \frac{1}{2}ab \sin \beta + \frac{1}{2}cd \sin \delta \\ &\leq \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}cd = \frac{1}{2}(ab + cd). \end{aligned}$$

Аналогно,

$$P = P_{ABD} + P_{BCD} = \frac{1}{2}ad \sin \alpha + \frac{1}{2}bc \sin \gamma \leq \frac{1}{2}ad + \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}(ad + bc).$$

Ако ги собереме последните две неравенства, добиваме



$$2P \leq \frac{1}{2}(ab + cd + ad + bc) = \frac{1}{2}(a + c)(b + d),$$

од каде што следува бараното неравенство.

IV година

1A. Нека a, b, c и d се четири последователни членови на една геометричка прогресија. Пресметај го изразот

$$(a - c)^2 + (b - c)^2 + (b - d)^2 - (a - d)^2.$$

Решение. Нека $b = aq$, $c = aq^2$ и $d = aq^3$. Тогаш

$$(a - c)^2 = (a - aq^2)^2 = a^2 - 2a^2q^2 + a^2q^4 = a^2(1 - 2q^2 + q^4)$$

$$(b - c)^2 = a^2(q^2 - 2q^3 + q^4)$$

$$(b - d)^2 = a^2(q^2 - 2q^4 + q^6)$$

$$(a - d)^2 = a^2(1 - 2q^3 + q^6).$$

Заменувајќи ги последните четири равенства во почетниот израз имаме

$$\begin{aligned}(a - c)^2 + (b - c)^2 + (b - d)^2 - (a - d)^2 &= a^2(1 - 2q^2 + q^4) + a^2(q^2 - 2q^3 + q^4) \\ &\quad + a^2(q^2 - 2q^4 + q^6) - a^2(1 - 2q^3 + q^6) \\ &= a^2(1 - 2q^2 + q^4 + q^2 - 2q^3 + q^4 \\ &\quad + q^2 - 2q^4 + q^6 - 1 + 2q^3 - q^6) \\ &= a^2 \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

1Б. Нека $x > 2$ е реален број и $n = 2^{2017}$. Пресметај го збирот на броевите

$$\ln x, \ln \sqrt{x}, \ln \sqrt[4]{x}, \ln \sqrt[8]{x}, \dots, \ln \sqrt[n]{x}.$$

Решение. Бидејќи $\frac{\frac{1}{\ln x^{2^s}}}{\frac{1}{\ln x^{2^{s-1}}}} = \frac{1}{2}$ за секој $s \in \{1, 2, \dots, 2017\}$ следува дека дадените

броеви формираат геометричка прогресија со количник $\frac{1}{2}$. Значи, бараниот збир е

$$S_{2017} = \ln x \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2017} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2017} - 1\right) \ln x.$$

2АБ. Определи го членот со најголем коефициент во развојот на биномот

$$(x + \sqrt{2})^{50}.$$

Решение. Нека

$$T_{k+1} = \binom{50}{k} x^k (\sqrt{2})^{50-k}, \text{ и } A_{k+1} = \binom{50}{k} (\sqrt{2})^{50-k}$$

е коефициентот пред x^k , за $k = 0, 1, 2, \dots, 50$. Од

$$\frac{A_{k+1}}{A_k} = \frac{\binom{50}{k}(\sqrt{2})^{50-k}}{\binom{50}{k-1}(\sqrt{2})^{50-k-1}} = \frac{51-k}{k} \sqrt{2},$$

добиваме дека

$$\frac{A_{k+1}}{A_k} < 1 \Leftrightarrow \frac{51-k}{k} \sqrt{2} < 1 \quad k > 51(2 - \sqrt{2}) \approx 29,88,$$

т.е. $k \geq 30$. Значи, за $k \geq 30$ важи $A_{k+1} < A_k$, а за $k < 30$ важи $A_{k+1} > A_k$. Според тоа најголем коефициент има членот

$$T_{30} = \binom{50}{29} x^{29} (\sqrt{2})^{21}.$$

3АБ. Производот на осум последователни броеви не може да биде четврти степен на природен број. Докажи!

Решение. Нека x е најмалиот од осумте последователни природни броеви. Според тоа, броевите се $x, x+1, x+2, x+3, x+4, x+5, x+6, x+7$, а нивниот производ е $P = x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)(x+7)$, кој можеме да го запишеме во облик

$$\begin{aligned} P &= [x(x+7)][(x+1)(x+6)][(x+2)(x+5)][(x+3)(x+4)] \\ &= (x^2 + 7x)(x^2 + 7x + 6)(x^2 + 7x + 10)(x^2 + 7x + 12). \end{aligned}$$

Ако воведеме смена $a = x^2 + 7x + 6$, тогаш P можеме да го запишеме во облик

$$\begin{aligned} P &= (a-6)a(a+4)(a+6) = (a^2-36)(a^2+4a) = a^4 + 4a^3 - 36a^2 - 144a \\ &= a^4 + 4a(a^2 - 9a - 36) = a^4 + 4a(a+3)(a-12). \end{aligned}$$

Според условот на задачата x е природен број, што значи $x \geq 1$ од каде следува дека $a = x^2 + 7x + 6 \geq 14$. Значи $a-12 > 0$, од каде добиваме дека $a^4 < P$. Од друга страна, $P = a^4 + 4a^3 - 36a^2 - 144a < a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1 = (a+1)^4$. Од последните две равенства добиваме дека $a^4 < P < (a+1)^4$, а тврдењето на задачата следува од тоа што a и $a+1$ се последователни природни броеви.

4А. За секој природен број n важи $f(n+1) = \frac{2f(n)+3}{f(n)+2}$ и $f(0) = \frac{1}{4}$. Докажи дека за секој природен број n , важи $0 < f(n) < \sqrt{3}$.

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по n . Јасно, $0 < f(1) < \sqrt{3}$. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $n = k$, т.е. $0 < f(k) < \sqrt{3}$. Имаме, $f(k+1) = 2 - \frac{1}{f(k)+2}$. Оттука, имајќи предвид дека $0 < f(k) < \sqrt{3}$, добиваме дека $0 < 2 - \frac{1}{2} < f(k+1) < 2 - \frac{1}{\sqrt{3}+2} = \sqrt{3}$, т.е. тврдењето важи и за $n = k+1$. Конечно, од

принципот на математичка индукција следува дека $0 < f(n) < \sqrt{3}$, за секој природен број n .

4Б. Докажи, дека за секој $n \in \mathbb{N}$ постои број кој во декадниот запис има само 0 и 1 кој е делив со n .

Решение. Да ги разгледаме $n+1$ -те броеви $1, 11, 111, \dots, \underbrace{111\dots1}_{n+1 \text{ цифра}}$. При делење со n секој од овие броеви има еден од остатоците $0, 1, \dots, n-1$. Бидејќи се $n+1$ броеви, од принципот на Дирихле следува дека меѓу остатоците мора да има барем два еднакви. Нека броевите $\underbrace{11\dots1}_i$ и $\underbrace{11\dots1}_j$, $j > i$ при делење со n имаат исти остатоци. Тогаш бројот $\underbrace{11\dots1}_j - \underbrace{11\dots1}_i = \underbrace{11\dots100\dots0}_{j-i \text{ цифри}}$ е делив со n .