O linearnom programiranju, IV. 2. dio

Luka Neralić[1], *Zagreb*

Odnosi između primarnog i dualnog problema

Razmotrimo sada opći oblik standardnog problema maksimizacije kao primarni problem (ili primal)

$$\max z(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \leqslant & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \leqslant & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \leqslant & b_m
\end{array}$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ \ldots,\ x_n \geqslant 0.$$

Dualni problem (ili dual), do kojeg dolazimo pomoću navedenih pravila (a) – (i) na isti način i uz iste oznake kao u primjeru 10, je sljedeći standardni problem minimizacije

$$\min h(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + \cdots + b_m\lambda_m$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}\lambda_1 & + & a_{21}\lambda_2 & + & \cdots & + & a_{m1}\lambda_m & \geqslant & c_1 \\
a_{12}\lambda_1 & + & a_{22}\lambda_2 & + & \cdots & + & a_{m2}\lambda_m & \geqslant & c_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{1n}\lambda_1 & + & a_{2n}\lambda_2 & + & \cdots & + & a_{mn}\lambda_m & \geqslant & c_n
\end{array}$$

$$\lambda_1 \geqslant 0,\ \lambda_2 \geqslant 0,\ \ldots,\ \lambda_m \geqslant 0.$$

Primal i dual mogu se kraće zapisati uz pomoć oznaka za sumaciju kao

$$\max z(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

uz ograničenja

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m \qquad (P)$$

$$x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, \ldots, n$$

i

$$\min h(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = \sum_{i=1}^{m} b_i\lambda_i$$

[1] Autor je redoviti profesor na Ekonomskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu, e-mail: lneralic@efzg.hr

uz ograničenja

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i \geqslant c_j, \; j = 1, 2, \ldots, n \qquad (D)$$

$$\lambda_i \geqslant 0, \; i = 1, 2, \ldots, m.$$

Odnos između funkcija cilja primala (P) i duala (D) može se iskazati preko sljedećeg teorema.

Teorem 1. Za funkcije cilja $z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ primala i $h(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ duala vrijedi

$$z(x_1,\; x_2, \ldots,\; x_n) \leqslant h(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m),$$

za svako $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S_P$, i svako $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) \in S_D$,

pri čemu je S_P odnosno S_D skup mogućih rješenja primala (P) odnosno duala (D).

Za dokaz teorema vidi npr. Martić [5], str. 78, Neralić [10], str. 115–116, (gdje je primarni problem standardni problem minimizacije, pa vrijedi obrnuta relacija), Hadley [1], str. 228. U knjizi Murty [6], str. 190, tvrdnja teorema 1 (za slučaj primarnog problema minimizacije) naziva se slabim teoremom dualiteta. Istaknimo da prema teoremu 1 moguće rješenje duala određuje gornju ogradu funkcije cilja primala, dok moguće rješenje primala daje donju ogradu funkcije cilja duala.

Teorem 2. (Teorem o egzistenciji) Problem linearnog programiranja ima optimalno rješenje ako i samo ako su neprazni skupovi mogućih rješenja S_P primala (P) i S_D duala (D).

Dokaz teorema 2 može se naći npr. u Neralić [10], str. 116. Vidi također Intriligator [3], str. 131. Prema teoremu 2 optimalno rješenje problema linearnog programiranja postoji ako i samo ako svaki od dualnih problema ima moguće rješenje. U ranije razmotrenom primjeru 10 neprazni su skupovi mogućih rješenja S_P primala i S_D duala, i oba problema su imala optimalno rješenje. Ako je skup mogućih rješenja jednog od dualnih problema prazan, tada je ili prazan skup mogućih rješenja njegovog duala ili je funkcija cilja njegovog duala neomeđena na skupu mogućih rješenja. Općenito, ili oba dualna problema imaju moguća rješenja, pa onda po teoremu egzistencije imaju optimalna rješenja (kao u primjeru 10), ili samo jedan od dualnih problema ima moguće rješenje, pri čemu je njegova funkcija cilja neomeđena (pa tada dual nema mogućeg rješenja), ili ni jedan od dualnih problema nema mogućeg rješenja. Ilustrirajmo to na sljedećim primjerima.

Primjer 13. Razmotrimo ovaj problem linearnog programiranja

$$\max z = 12x_1 + 8x_2$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & x_2 & \leqslant & 1 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & \leqslant & 2 \end{array}$$

$$x_1 \geqslant 0, \; x_2 \geqslant 0.$$

Lako se može pokazati (vidi Neralić [8], str. 139, primjer 3, ili Neralić [9], str. 209) da je funkcija cilja tog problema neomeđena odozgo. Dualni problem tog problema je

$$\min h = \lambda_1 + 2\lambda_2$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcrcr} \lambda_1 & - & 2\lambda_2 & \geqslant & 12 \\ -\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & \geqslant & 8 \end{array}$$

$$\lambda_1 \geqslant 0, \; \lambda_2 \geqslant 0.$$

Nije teško vidjeti (npr. grafički) da dualni problem nema mogućeg rješenja.

Primjer 14. Razmotrimo sljedeći problem linearnog programiranja

$$\max z = -x_1 - 2x_2$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcrcr} -x_1 & + & 2x_2 & \leqslant & -1 \\ x_1 & - & 2x_2 & \leqslant & -1 \end{array}$$
$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$$

Lako se pokaže da taj problem nema mogućeg rješenja, kao i da dualni problem

$$\min h = -\lambda_1 - 2\lambda_2$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcrcr} -\lambda_1 & + & \lambda_2 & \geqslant & -1 \\ 2\lambda_1 & - & 2\lambda_2 & \geqslant & -2 \end{array}$$
$$\lambda_1 \geqslant 0,\ \lambda_2 \geqslant 0$$

ima odozdo neomeđenu funkciju cilja na skupu mogućih rješenja.

Primjer 15. Neka je primarni problem

$$\min h = -\lambda_1 - \lambda_2$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcrcr} \lambda_1 & - & \lambda_2 & \geqslant & 5 \\ -\lambda_1 & + & \lambda_2 & \geqslant & 4 \end{array}$$
$$\lambda_1 \geqslant 0,\ \lambda_2 \geqslant 0.$$

Lako se pokaže da taj problem nema mogućeg rješenja, kao ni njegov dual

$$\max z = 5x_1 + 4x_2$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & x_2 & \leqslant & -1 \\ -x_1 & + & x_2 & \leqslant & -1 \end{array}$$
$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$$

Teorem 3. (Teorem dualiteta) Moguće rješenje problema linearnog programiranja je optimalno ako i samo ako postoji moguće rješenje dualnog problema, tako da su vrijednosti funkcija cilja oba problema jednake.

Za dokaz teorema 3 vidi Neralić [10], str 117. Vidi također Martić [5], str. 78–84, Murty [6], str. 192–193, gdje su navedene različite formulacije teorema dualiteta, te Intriligator [3], str. 132–134.

Teorem 4. (Princip oslabljene komplementarnosti) Točke $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ i $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_m^*)$ su optimalna rješenja primarnog problema (P) i dualnog problema (D), respektivno, ako i samo ako zadovoljavaju uvjete oslabljene komplementarnosti

$$(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i^*)x_j^* = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

i

$$\lambda_i^*(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^*) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Za dokaz vidi npr. Martić [5], str. 85–86, Neralić [10], str. 117-118, Murty [6], str. 197–198. Vidi također Intriligator [3], str. 135.

Zbog ograničenja nenegativnosti $x_j^* \geqslant 0,\ j = 1, 2, \ldots, n$ i $\lambda_i^* \geqslant 0, i = 1, 2, \ldots, m$ iz prvih relacija u teoremu 4 dobivamo

$$\text{ako je} \quad x_j^* > 0, \quad \text{tada je} \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i^* = c_j,$$

$$\text{ako je} \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i^* > c_j, \quad \text{tada je} \quad x_j^* = 0,$$

dok iz drugih relacija proizlazi

$$\text{ako je} \quad \lambda_i^* > 0, \quad \text{tada je} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* = b_i,$$

$$\text{ako je} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* < b_i, \quad \text{tada je} \quad \lambda_i^* = 0.$$

Ilustrirajmo princip oslabljene komplementarnosti na primjeru 10

$$\max z(x_1, x_2) = 70x_1 + 80x_2$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcrcl} 5x_1 & + & 4x_2 & \leqslant & 600 \\ x_1 & + & 2x_2 & \leqslant & 240 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & \leqslant & 500 \end{array}$$
$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,$$

i njegovom dualu

$$\min h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 600\lambda_1 + 240\lambda_2 + 500\lambda_3$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcl} 5\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 & \geqslant & 70 \\ 4\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 & \geqslant & 80 \end{array}$$
$$\lambda_1 \geqslant 0,\ \lambda_2 \geqslant 0,\ \lambda_3 \geqslant 0.$$

Kako znamo iz tabele 1, optimalno rješenje primala je $x_1^* = 40,\ x_2^* = 100,\ x_3^* = 0,\ x_4^* = 0,\ x_5^* = 100$, dok je maksimalna vrijednost funkcije cilja $z^* = 10\,800$. Tada prema principu oslabljene komplementarnosti dobivamo:

$$\text{iz} \quad x_1^* = 40 > 0 \ \text{ slijedi } \ 5\lambda_1^* + \lambda_2^* + 5\lambda_3^* = 70$$
$$\text{iz} \quad x_2^* = 100 > 0 \ \text{ slijedi } \ 4\lambda_1^* + 2\lambda_2^* + 2\lambda_3^* = 80.$$

Osim toga, imamo:

$$\text{iz} \quad 5x_1^* + 2x_2^* = 400 < 500 \ \text{ slijedi } \ \lambda_3^* = 0.$$

Tada se iz sustava lineranih jednadžbi

$$\begin{array}{rcl} 5\lambda_1^* + \lambda_2^* + 5\lambda_3^* & = & 70 \\ 4\lambda_1^* + 2\lambda_2^* + 2\lambda_3^* & = & 80, \end{array}$$

zbog $\lambda_3^* = 0$ dobiva

$$\begin{array}{rcl} 5\lambda_1^* + \lambda_2^* & = & 70 \\ 4\lambda_1^* + 2\lambda_2^* & = & 80. \end{array}$$

Iz tog sustava se lako dobije $\lambda_1^* = 10$ i $\lambda_2^* = 20$. Pripadna optimalna vrijednost funkcije cilja duala je $h^* = 600\lambda_1^* + 240\lambda_2^* + 500\lambda_3^* = 6000 + 4800 + 0 = 10\,800$, tj. jednaka je optimalnoj vrijednosti funkcije cilja primala, što je u skladu s teoremom dualiteta.

Razmotrimo najprije problem transporta. Pretpostavimo da u m centara ponude (ishodišta) imamo količine $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_m$ nekog homogenog proizvoda, kojeg treba prevesti u n centara potražnje (odredišta), s poznatom količinom potražnje $b_1,\ b_2, \ldots,\ b_m$ tog proizvoda. Neka su nadalje poznati troškovi transporta $c_{ij},\ i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$ jedinice proizvoda iz svakog ishodišta i u svako odredište j. Problem se sastoji u tome da se odrede količine $x_{ij},\ i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$ proizvoda, koje treba prevesti iz ishodišta i u odredište j, tako da ukupni troškovi transporta budu minimalni, da ukupna količina prijevoza iz ishodišta i ne premaši ponudu $a_i, i = 1, 2, \ldots, m$, te da prevezena količina robe u odredište j ne bude manja od potražnje $b_j, j = 1, 2, \ldots, n$. Taj se problem može formulirati kao problem linearnog programiranja u obliku

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

uz ograničenja

$$-\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \geqslant -a_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geqslant b_j,\ j = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_{ij} \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Napomenimo, da se ovaj oblik problema transporta razlikuje od problema razmatranog npr. u Kurepa, Neralić [4], str. 144, Neralić [10], str. 90, kojemu su ograničenja u obliku jednadžbi. Naime, ovdje se zahtijeva da ukupna količina prijevoza iz ishodišta i ne premaši ponudu $a_i, i = 1, 2, \ldots, m$, te da prevezena količina robe u odredište j ne bude manja od potražnje $b_j, j = 1, 2, \ldots, n$. Osim toga, prvo ograničenje dobiveno je iz originalnog, koje ima znak $\leqslant$, množenjem s (-1). Za tako postavljeni problem transporta, uvođenjem dualnih varijabli u_i i v_j, dualni problem je

$$\max h = -\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$$

uz ograničenja

$$-u_i + v_j \leqslant c_{ij},\ i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$$
$$u_i \geqslant 0,\ v_j \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Ako dualnu varijablu u_i interpretiramo kao vrijednost (cijenu) robe u ishodištu i, a varijablu v_j kao vrijednost (cijenu) robe u odredištu j, onda prema ograničenjima dualnog problema mora vrijediti

$$v_j \leqslant u_i + c_{ij},\ i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Prema tome, dualne varijable treba odrediti tako, da vrijednost robe u odredištu j ne premaši zbroj vrijednosti robe u ishodištu i i transportnih troškova od ishodišta i do odredišta j. Osim toga, u optimalnom rješenju iz principa oslabljene komplementarnosti dobivamo:

$$\text{za }\ x_{ij}^* > 0, \quad \text{slijedi } \ -u_i + v_j = c_{ij},\ i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Dakle, ako se iz ishodišta i u odredište j treba prevesti količina robe $x_{ij}^* > 0$, tada je vrijednost robe u odredištu jednaka vrijednosti u ishodištu uvećanoj upravo za trošak transporta. To znači da bi se moglo angažirati prijevoznika, koji bi robu kupio u ishodištu i po cijeni u_i, prevezao količinu b_j i prodao je u odredištu j po cijeni v_j. Prema teoremu dualiteta vrijednosti funkcija cilja u optimalnom rješenju primala i duala su jednake, pa bi na taj način prijevoznik dobio upravo iznos minimalnih troškova transporta. (Vidi npr. Neralić [10], str. 121–122, Martić [5], str. 97–98, Hadley [1], str. 486–487.)

Razmotrimo još i problem alokacije resursa. Pretpostavimo da poduzeće ima određenu količinu svakog od m resursa, koje treba alocirati na n aktivnosti (ili procesa). (Vidi npr. Hillier, Lieberman [2], str. 33–34, Martić [5], str. 94–96, Neralić [10], str. 12–13.) Svaka aktivnost karakterizirana je utroškom resursa pri jediničnoj razini aktivnosti. Ovdje nam aktivnost predstavlja količinu proizvodnje nekog proizvoda iz raspoloživih resursa. Pretpostavimo još da imamo određenu vrijednost koja mjeri ukupne postignute rezultate (ovdje ćemo promatrati ukupan profit), uz poznato povećanje te vrijednosti koje je rezultat jediničnog povećanja svake od aktivnosti (tj. profit po jedinici proizvoda). Problem se sastoji u alociranju resursa na aktivnosti, uvažavajući činjenicu o raspoloživim količinama resursa uz ostvarivanje maksimalne vrijednosti ukupnih postignutih rezultata (ukupnog profita). Uz uobičajene pretpostavke u linearnom programiranju (proporcionalnost, aditivnost i djeljivost) i oznake

a_{ij} – utrošak resursa i po jedinici proizvoda j $(i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n)$;

b_i – raspoloživa količina resursa i $(i = 1, 2, \ldots, m)$;

c_j – profit po jedinici proizvoda j $(j = 1, 2, \ldots, n)$;

x_j – nepoznata razina aktivnosti j $(j = 1, 2, \ldots, n)$,

postavljeni problem može se formulirati kao problem linearnog programiranja oblika

$$\max h = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

uz ograničenja

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$$
$$x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Njegov dual je

$$\min z = \sum_{i=1}^{m} b_i \lambda_i$$

uz ograničenja

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \lambda_i \geqslant c_j,\ j = 1, 2, \ldots, n$$
$$\lambda_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Kako je c_j profit po jedinici proizvoda j, znači da ima dimenziju kuna po jedinici, pa tada $a_{ij}\lambda_i$ također mora imati dimenziju kuna po jedinici proizvoda j. Međutim, dimenzija od a_{ij} je jedinica resursa i po jedinici proizvoda j. Prema tome, dimenzija dualne varijable λ_i je kuna po jedinici resursa i, pa ona predstavlja vrijednost (cijenu ili trošak) jedinice resursa i, $i = 1, 2, \ldots, m$, za poduzeće koje njime raspolaže. Funkcija cilja izražava ukupnu vrijednost raspoloživih resursa. Zatim, izraz

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \lambda_i$$

predstavlja vrijednost (trošak) svih m resursa potrebnih za proizvodnju jedinice proizvoda j. Prema ograničenjima dualnog problema taj trošak ne može biti manji od profita c_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ po jedinici proizvoda. Dakle, iz dualnog problema određuju se λ_i tako da se minimizira ukupna vrijednost resursa, pri čemu vrijednost resursa utrošenih u proizvodnji jedinice proizvoda j ne može biti manja od profita c_j ostvarenog prodajom jedinice proizvoda j. (Vidi npr. Hadley [1], str. 483–484, Neralić [10], str. 123.)

Iz principa oslabljene komplementarnosti dobivamo:

$$\text{za} \;\; x_j^* > 0, \quad \text{slijedi} \;\; \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i^* = c_j.$$

To znači, da za proizvod koji treba proizvoditi prema optimalnom rješenju trošak mora biti jednak profitu. Osim toga,

$$\text{za} \;\; \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* < b_i \;\; \text{slijedi} \;\; \lambda_i^* = 0.$$

Prema tome, ako resurs i nije u potpunosti iskorišten, njegova dualna cijena jednaka je nuli. (Vidi naprijed primjer 10 i konkretnu intrepretaciju rješenja primala i duala.)

Može se pokazati da za optimalnu vrijednost λ_i^*, koja se naziva cijenom u sjeni, dualnom cijenom ili oportunitetnim troškom, vrijedi

$$\frac{\partial h}{\partial b_i}(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = \lambda_i^*, \;\; i = 1, 2, \ldots, m.$$

U skladu s tim, λ_i^* pokazuje za koliko se približno promijeni optimalna vrijednost funkcije cilja primala, ako se resurs i poveća za jednu jedinicu. Pritom, znajući s jedne strane vrijednost λ_i^*, koja odgovara i-tom ograničenju zadovoljenom kao jednakost u optimalnom rješenju primala (raspoloživi resurs je u potpunosti iskorišten) i s druge iznos ulaganja u povećanje resursa i za jednu jedinicu, može se vidjeti ima li to ulaganje smisla. Naime, ulaganje u proširenje kapaciteta resursa i ima smisla, ako je dualna cijena λ_i^* veća od iznosa ulaganja, jer je tada povećanje profita veće od ulaganja.

Zadaci za vježbu

1. Za problem linearnog programiranja

$$\max z = 5x_1 + 2x_2$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcrcr} 4x_1 & + & 5x_2 & \leqslant & 40 \\ x_1 & + & 4x_2 & \leqslant & 21 \\ x_1 & & & \leqslant & 8 \end{array}$$
$$x_1 \geqslant 0, \;\; x_2 \geqslant 0$$

formulirajte njegov dual. Primarni problem riješite simpleks metodom, a dualni na temelju rješenja primala i principa oslabljene komplementarnosti. (Usporedite Neralić [10], str. 184.)

2. Formulirajte dual problema

$$\min h = 17\lambda_1 + 8\lambda_2 + 32\lambda_3$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcr} \lambda_1 - \lambda_2 + 4\lambda_3 & \geqslant & 5 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 & \geqslant & 8 \end{array}$$
$$\lambda_1 \geqslant 0, \;\; \lambda_2 \geqslant 0, \;\; \lambda_3 \geqslant 0.$$

Primal i dual riješite simpleks metodom. Provjerite da su optimalne vrijednosti funkcija cilja jednake. Kako se interpretira optimalno rješenje duala?

3. Simpleks metodom pokažite da funkcija cilja primala u primjeru 13 nije omeđena odozgo na skupu mogućih rješenja, pa taj problem nema optimalno rješenje.

4. Pokažite grafički da dualni problem u primjeru 13 nema mogućeg rješenja. Do istog zaključka dođite Charnesovom M -metodom ili dvofaznom simpleks metodom.

5. Provjerite da primal u primjeru 14 nema mogućeg rješenja, dok funkcija cilja duala nije omeđena odozdo na skupu mogućih rješenja.

6. Pokažite da u primjeru 15 ni primal ni dual nemaju moguće rješenje.

7. Za problem alokacije resursa pri proizvodnji dva proizvoda od četiri vrste sirovina (raspoložive količine sirovina su u tisućama kilograma, utrošci pojedine sirovine po jedinici proizvoda u kilogramima, te profit po jedinici proizvoda u tisućama kuna) formuliran je sljedeći problem linearnog programiranja

$$\max z = 7x_1 + 5x_2$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & \leqslant & 19 \\ 2x_1 & + & x_2 & \leqslant & 13 \\ & & 3x_2 & \leqslant & 15 \\ 3x_1 & & & \leqslant & 18 \end{array}$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$$

Riješite taj problem simpleks metodom (koja daje i optimalno rješenje duala), a zatim formulirajte dual tog problema, te provjerite i interpretirajte njegovo rješenje.

Literatura

[1] G. Hadley, *Linear Programming*, Addison Wesley, Reading, MA, 1962.

[2] F. S. Hillier and G. J. Lieberman, *Introduction to Operations Research*, Seventh Edition, McGraw-Hill, New York, 2001.

[3] M. Intriligator, *Mathematical Optimization and Economic Theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1971. (Ruski prijevod: Progress, Moskva, 1975.)

[4] S. Kurepa, L. Neralić, *Matematika 3*, Udžbenik i zbirka zadataka, Školska knjiga, Zagreb, 2000.

[5] Lj. Martić, *Matematičke metode za ekonomske analize*, II svezak, Treće izdanje, Narodne Novine, Zagreb, 1979.

[6] K. G. Murty, *Linear Programming*, John Wiley & Sons, New York, 1983.

[7] S. G. Nash and A. Sofer, *Linear and Nonlinear Programming*, McGraw-Hill, International Edition, New York, 1996.

[8] L. Neralić, *O linearnom programiranju, I*, Matematičko-fizički list, **LI** 3 (2000.–2001.), 134–140.

[9] L. Neralić, *O linearnom programiranju, II*, Matematičko-fizički list, **LI** 4 (2000.–2001.), 202–211.

[10] L. Neralić, *Uvod u matematičko programiranje 1*, Element, Zagreb, 2003.

[11] N. Wu and R. Coppins, *Linear Programming and Extensions*, McGraw-Hill, New York, 1981.