EVOLVENTA (JAMTK) 1(2) (2018), 27–32

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://www.umtk.info

Kosinusni teorem i primjena

Alija Muminagić[a], Jens Carstensen[b]

[a]Danska
[b]Danska

Sažetak: Sinusni teorem i kosinusni teorem imaju vrlo značajnu ulogu u geometriji te im se u nastavi matematike posvećuje posebna pažnja. U ovom radu je dat jedan manje poznat dokaz kosinusnog teorema, kao i njegovo geometrijsko značenje.

1. Kosinusni teorem s manje poznatim dokazom

Teorem 1.1. *Kvadrat dužine jedne stranice trougla jednak je razlici zbira kvadrata dužina drugih dviju stranica trougla i dvostrukog proizvoda dužina tih dviju stranica s kosinusom ugla između njih, to jest*

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2bc\cos\gamma\ . \end{array}\right\} \tag{1}$$

Dokaz : Teorem se može dokazati na više načina, a mi ovdje dajemo jedan manje poznat dokaz.

a) Dokažimo prvo da vrijedi jednakost $c^2 = a^2 + b^2 - 2bc\cos\gamma$ u *oštrouglom* trouglu $\triangle ABC$. Ostale dvije jednakosti se slično dokazuju. U tu svrhu neka je $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$. Ako su D, E i F dodirne tačke datog trougla i njemu upisane kružnice $k(I, r)$ sa centrom u I i poluprečnika r, tada je $|ID| = |IE| = |IF| = r$. Neka je $|CD| = x$. Na osnovu teorema o jednakosti tangentnih dužina slijedi da je $|CE| = |CD| = x$.

Sa Slike 1 vidimo da je

$$|AE| = |AF| = b - x, |BF| = |BD| = a - x\ ,$$

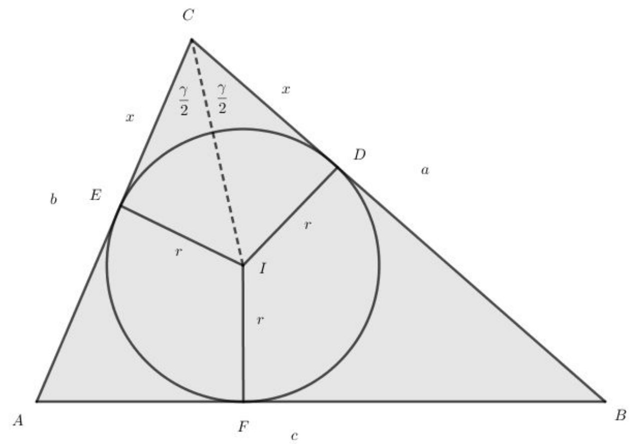
pa je

$$c = |AB| = |AF| + |FB| = b - x + a - x\ ,$$

odnosno

$$x = \frac{a + b - c}{2}\ . \tag{2}$$

Ciljna skupina: srednja škola
Rad preuzet: 2018.
Kategorizacija: Stručni rad
Email adrese: (Alija Muminagić), (Jens Carstensen)



Slika 1:

Kako je trougao $\triangle IDC$ pravougli, to je $tg\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{r}{x}$, te je

$$x = \frac{r}{tg\frac{\gamma}{2}} \ . \tag{3}$$

Iz (2) i (3) dobijamo da vrijedi jednakost

$$\frac{a+b-c}{2} = \frac{r}{tg\frac{\gamma}{2}} \ ,$$

te imamo da je

$$r = \frac{(a+b-c)}{2} tg\frac{\gamma}{2} \ . \tag{4}$$

Znamo da je površina trougla $\triangle ABC$ data sa $P_{ABC} = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$ i $P_{ABC} = r \cdot s = r \cdot \dfrac{a+b+c}{2}$, iz čega slijedi da je $\dfrac{1}{2}ab\sin\gamma = r \cdot \dfrac{a+b+c}{2}$. Odavde je

$$r = \frac{ab\sin\gamma}{a+b+c} = \frac{2ab\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b+c} \ . \tag{5}$$

Konačno, eliminacijom r iz (4) i (5), dobijamo

$$\frac{(a+b-c)}{2} tg\frac{\gamma}{2} = \frac{2ab\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b+c} \ ,$$

odnosno

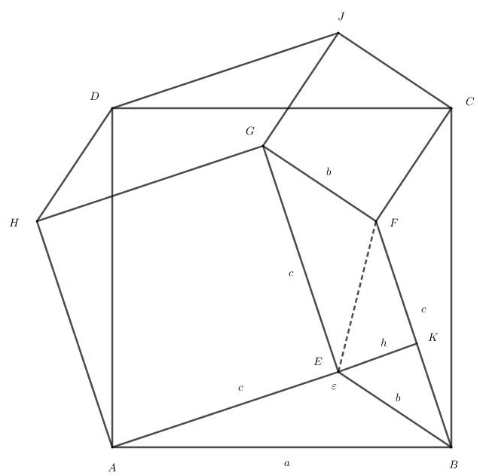
$$(a+b-c)\,(a+b+c) = 4ab\cos^2\frac{\gamma}{2} \ .$$

Koristeći da je $\cos^2\frac{\gamma}{2} = \frac{1+\cos\gamma}{2}$, posljednja jednakost se može zapisati kao

$$(a+b)^2 - c^2 = 2ab + 2ab\cos\gamma \ ,$$

to jest $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, što je i trebalo dokazati.

b) Neka je sada trougao $\triangle ABE$ *tupougli*, to jest neka je u tom trouglu ugao $\varepsilon = \measuredangle AEB$ veći od 90°. Prikažimo geometrijski dokaz. Uvedimo oznake kao na Slici 2, to jest $a = |AB|$, $b = |BE|$, $c = |AE|$ i sa P_{XYZ} označimo površinu trougla $\triangle XYZ$, a sa P_{PQRS} površinu četverougla $PQRS$. Nad stranicom AB konstruišimo kvadrat $ABCD$, a nad stranicama BC, CD i AD trouglove $\triangle BCF$, $\triangle CDJ$ i $\triangle ADH$ podudarne s trouglom $\triangle ABE$ (vidjeti Sliku 2). Tako je $P_{AEB} = P_{DJC}$ i $P_{BCF} = P_{ADH}$. Zato su površine četverougla $ABCD$ i mnogougla $AEBFCJDH$ jednake, to jest $a^2 = c^2 + b^2 + 2P_{BEGF}$.



Slika 2:

Kako je

$$P_{BEGF} = 2P_{BFE} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot c \cdot h = ch \ ,$$

to je

$$a^2 = c^2 + b^2 + 2ch = c^2 + b^2 + 2cb\cos(180^\circ - \varepsilon) \ ,$$

odnosno $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\varepsilon$. Druge dvije jednakosti dokazuju se analogno.

c) U slučaju kada je trougao $\triangle ABC$ *pravougli,* Teorem 1.1 se svodi na Pitagorin teorem. $\square$

2. Kosinusni teorem - geometrijsko značenje

Po Teoremu 1.1 imamo da u trouglu $\triangle ABC$ vrijedi jednakost

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \ , \tag{6}$$

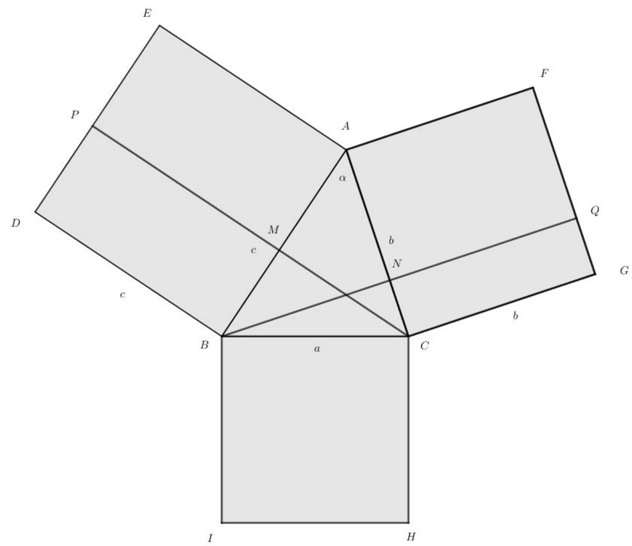
odnosno

$$a^2 = b(b - c\cos\alpha) + c(c - b\cos\alpha) \ . \tag{7}$$

Pogledajmo šta formula (7) geometrijski predstavlja.

2.1. Trougao $\triangle ABC$ je oštrougli

Nad stranicama datog oštrouglog trougla $\triangle ABC$ konstruišimo, redom, kvadrate $ABDE$, $ACGF$ i $BCHI$ (vidjeti Sliku 3). Neka visina povučena iz vrha B datog trougla siječe produžene stranice kvadrata $ACGF$ u tačkama N i Q, a visina povučena iz vrha C siječe produžene stranice kvadrata $ABDE$ u tačkama M i P. Izračunajmo sada koliko je $P_{CNQG} + P_{BMPD}$.



Slika 3:

Znamo da je

$$P_{CNQG} + P_{BMPD} = |CG| \cdot |CN| + |BD| \cdot |BM| = b \cdot |CN| + c \cdot |BM| \ ,$$

odnosno

$$P_{CNQG} + P_{BMPD} = b\,(b - |AN|) + c\,(c - |AM|) \ .$$

U pravouglom trouglu $\triangle AMC$ je $\cos\alpha = \frac{|AM|}{|AC|} = \frac{|AM|}{b}$, odnosno $|AM| = b\cos\alpha$. Slično imamo da u pravouglom trouglu $\triangle ANC$ je $\cos\alpha = \frac{|AN|}{|AB|} = \frac{|AN|}{c}$, odnosno $|AN| = c\cos\alpha$. Dakle,

$$P_{CNQG} + P_{BMPD} = b\,(b - c\cos\alpha) + c\,(c - b\cos\alpha) \ . \tag{8}$$

Sada, iz (6),(7) i (8) dobijamo geometrijsko značenje kosinusnog teorema (Teorema 1.1):

Površina kvadrata konstruisanog nad stranicom a jednaka je zbiru površina pravougaonika P_{CNQG} i P_{BMPD} (vidjeti Sliku 3).

2.2. Trougao $\triangle ABC$ je tupougli

Neka je u trouglu $\triangle ABC$ ugao $\alpha > 90^\circ$ (vidjeti Sliku 4). Visine datog trougla iz vrhova B i C sijeku prave AC i AB u tačkama N i M. Na taj način dobijamo opet pravougaonike $CNQG$ i $BMPD$ koji sadrže kvadrate $ACGF$ i $BAED$, tj. kvadrate sa dužinama stranica $|AC| = b$ i $|AB| = c$. U pravouglom trouglu $\triangle AMC$ je

$$\cos\measuredangle MAC = \cos\,(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha = \frac{|AM|}{|AC|} = \frac{|AM|}{b} \ ,$$

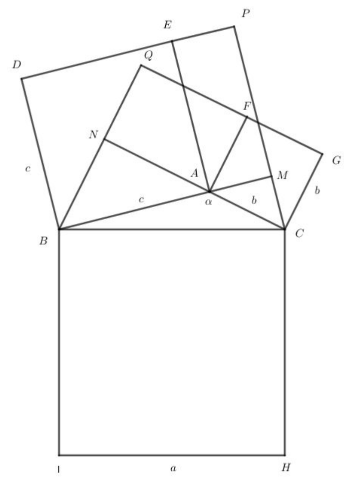
to jest $|AM| = -b\cos\alpha$.

Sada je

$$|BM| = |AB| + |AM| = c - b\cos\alpha \ ,$$

kao i u slučaju kada je $\triangle ABC$ oštrougli. Jedina razlika je što je sada $|BM| > c$. Dakle, vrijedi da je

$$P_{BMPD} = |BD| \cdot |BM| = c\,(c - b\cos\alpha) \ .$$



Slika 4:

Slično se pokaže da je i

$$P_{CNQG} = |CG| \cdot |CN| = b\,(b - c\cos\alpha)\ .$$

Dakle, i u ovom slučaju dobijamo isto geometrijsko značenje kosinusnog teorema(Teorema 1.1):

Površina kvadrata konstruisanog nad stranicom a jednaka je zbiru površina pravougaonika P_{CNQG} i P_{BMPD} (vidjeti Sliku 4).

2.3. Trougao $\triangle ABC$ je pravougli

Neka je u trouglu $\triangle ABC$ ugao $\alpha = 90°$. Tada se pravougaonici $CNQG$ i $BMPD$ poklapaju sa kvadratima $CAFG$ i $BAED$ i Teorem 1.1 se poklapa sa Pitagorinim teoremom.

3. Tri rješenja jednog primjera

Primjer 3.1. *Dokazati da u svakom trouglu vrijedi jednakost*

$$\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)\cos\alpha + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)\cos\beta + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\cos\gamma = 3\ . \tag{9}$$

Rješenje:

Rješenje 1: Primjenom kosinusnog teorema (Teorem 1.1) dobijamo da je

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},\ \cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\ ,$$

te je

$$\begin{aligned}
(9) \Leftrightarrow\ & \frac{\left(b^2+c^2\right)^2 - a^2\left(b^2+c^2\right)}{2b^2c^2} + \frac{\left(a^2+c^2\right)^2 - b^2\left(a^2+c^2\right)}{2a^2c^2} + \frac{\left(a^2+b^2\right)^2 - c^2\left(a^2+b^2\right)}{2a^2b^2} = 3,\\
\Leftrightarrow\ & \frac{b^4+2b^2c^2+c^4-a^2b^2-a^2c^2}{2b^2c^2} + \frac{a^4+2a^2c^2+c^4-b^2a^2-b^2c^2}{2a^2c^2} + \frac{a^4+2a^2b^2+b^4-c^2a^2-c^2b^2}{2a^2b^2} = 3,\\
\Leftrightarrow\ & \frac{b^2}{2c^2} + 1 + \frac{c^2}{2b^2} - \frac{a^2}{2c^2} - \frac{a^2}{2b^2} + \frac{a^2}{2c^2} + 1 + \frac{c^2}{2a^2} - \frac{b^2}{2c^2} - \frac{b^2}{2a^2} + \frac{a^2}{2b^2} + 1 + \frac{b^2}{2a^2} - \frac{c^2}{2b^2} - \frac{c^2}{2a^2} = 3,\\
\Leftrightarrow\ & 3 = 3\ .
\end{aligned}$$

Rješenje 2: Primjenom projekcionih relacija

$$
\begin{aligned}
a &= c\cos\beta + b\cos\gamma,\\
b &= a\cos\gamma + c\cos\alpha,\\
c &= a\cos\beta + b\cos\alpha,
\end{aligned}
$$

(dokazati) dobijamo da je

$$
\begin{aligned}
(9) \Leftrightarrow & \left(\frac{b\cos\alpha}{c} + \frac{c\cos\alpha}{b}\right) + \left(\frac{c\cos\beta}{a} + \frac{a\cos\beta}{c}\right) + \left(\frac{a\cos\gamma}{b} + \frac{b\cos\gamma}{a}\right) = 3,\\
\Leftrightarrow & \frac{c\cos\beta + b\cos\gamma}{a} + \frac{a\cos\gamma + c\cos\alpha}{b} + \frac{a\cos\beta + b\cos\alpha}{c} = 3,\\
\Leftrightarrow & \frac{a}{a} + \frac{b}{b} + \frac{c}{c} = 3, \text{ što je tačno.}
\end{aligned}
$$

Rješenje 3: Primjenom Sinusnog teorema dobijamo da je

$$
\begin{aligned}
(9) \Leftrightarrow & \left(\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} + \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\right)\cos\beta + \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)\cos\gamma = 3,\\
\Leftrightarrow & \frac{\sin\gamma\cos\beta + \sin\beta\cos\gamma}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha\cos\gamma + \sin\gamma\cos\alpha}{\sin\beta} + \frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\sin\gamma} = 3,\\
\Leftrightarrow & \frac{\sin(\gamma+\beta)}{\sin\alpha} + \frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\beta} + \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\gamma} = 3,\\
\Leftrightarrow & \frac{\sin(180^\circ-\alpha)}{\sin\alpha} + \frac{\sin(180^\circ-\beta)}{\sin\beta} + \frac{\sin(180^\circ-\gamma)}{\sin\gamma} = 3,\\
\Leftrightarrow & \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sin\beta}{\sin\beta} + \frac{\sin\gamma}{\sin\gamma} = 3, \text{ što je tačno.}
\end{aligned}
$$

□

Literatura

[1] J. Carstensen, A. Muminagić: *Zanimljiv dokaz kosinusova poučka,* Miš, broj 81/godina 17./ listopad 2015.
[2] J. Carstensen, A. Muminagić: *Matematiske miniaturer,* 1. oplag, Fredniksberg, 2004.
[3] J. Carstensen: *Cosinusrelationen-et par bemerkniger,* LMFK-bladet Nr. 2, maj 2018.
[4] V. Pavković: *Elementarna matematika 2,* Školska knjiga, Zagreb, 1995.
[5] B.A. Kpeymap: *Zadačnik po algebre*, Hayka, Moskva, 1968.