Osječki matematički list **10**(2010), 59–69

Dvodimenzionalni interpolacijski spline

Danijel Grahovac*

Sažetak. *U radu se analizira problem interpolacije funkcije $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ poznate na diskretnom skupu točaka. Posebno se analizira i ilustrira primjena spline funkcija. Problem je ilustriran na nekoliko primjera uz uporabu metode produkta.*

Ključne riječi: *spline interpolacija, metoda produkta, B-spline, aproksimacija ploha*

Two-dimensional interpolation spline

Abstract. *The paper analyzes the problem of interpolation of function $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ known on a discrete set of points. The usage of spline functions is especially analyzed and illustrated. Problem is illustrated on several examples by the use of product method.*

Key words: *spline interpolation, product method, B-spline, surface fitting*

1. Uvod

Često je u praksi neka funkcija poznata samo na nekom diskretnom skupu točaka. Potrebno je odrediti takvu aproksimaciju ove funkcije, koja se sa zadanom funkcijom podudara na tom skupu točaka. Ovaj problem naziva se *problem interpolacije*. Najčešće aproksimacijsku funkciju tražimo na prostoru polinoma kao interpolacijski polinom. Međutim, kada je broj točaka u kojima poznajemo vrijednost funkcije velik, interpolacijski polinom je visokog stupnja i kao takav neuporabiv u primjenama. Umjesto toga koristi se *po dijelovima polinomna interpolacija*. Najpoznatija interpolacija po dijelovima je *spline interpolacija*. Od svih spline funkcija, kubični interpolacijski spline je vjerojatno najviše korišten i najbolje izučen u smislu aproksimacije i brojnih primjena, od aproksimacije u raznim normama, do rješavanja rubnih problema za obične diferencijalne jednadžbe. Ime *"spline"* označava elastičnu letvicu koja se mogla učvrstiti na rebra brodova kako bi se modelirao oblik oplate broda. Točna etimologija riječi pomalo je zaboravljena, a u matematičkom smislu pojavljuje se prvi put u Eulerovim radovima, oko 1700. godine, i slijedi mehaničku definiciju elastičnog štapa.

Dvodimenzionalni interpolacijski spline ima široku primjenu u znanosti i primjenama. Primjerice, zainteresirani čitatelj može proučiti primjer 11.6. u [7, str.

*Odjel za matematiku, Sveučilišta J.J. Strossmayera u Osijeku, `dgrahova@mathos.hr`

219], u kojem je opisano kako se u neurokirurgiji može rekonstruirati izgled i oblik tumora na mozgu uz pomoć dobivenih CT slika.

2. Interpolacijski spline

Problem traženja interpolacijske funkcije više varijabli složen je problem koji je privukao mnogo pozornosti, kako u prošlosti tako i danas. Taj problem u slučaju dvije varijable u literaturi se još često naziva i *aproksimacija plohe*[1], iako postoji razlika u ta dva pojma (vidi primjerice [7], [14]). Naime, interpolacija podrazumijeva da interpolacijska funkcija prolazi kroz sve zadane točke, dok aproksimacija dopušta pogreške u određenoj mjeri, a zatim se ploha zaglađuje.

Općenito, problem možemo definirati ovako: poznato je n različitih točaka u prostoru $(x_i, y_i, f_i) \in \mathbb{R}^3, \quad i = 1, \ldots, n$. Potrebno je pronaći funkciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ određene klase, tako da je

$$f(x_i, y_i) = f_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Uloga koju polinomi imaju u slučaju interpolacije funkcijom jedne varijable je jednako prisutna i u slučaju dvije varijable. Prostor svih polinoma dvije varijable stupnja najviše k označavamo s $\Pi_k(\mathbb{R}^2)$, ili možemo kraće pisati Π_k. Tipičan element prostora $\Pi_k(\mathbb{R}^2)$ je funkcija oblika

$$(x, y) \mapsto \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k-i} c_{ij} x^i y^j = \sum_{0 \leq i+j \leq k} c_{ij} x^i y^j .$$

Lako se pokaže (vidi [12]) da je baza prostora Π_k skup funkcija

$$(x, y) \mapsto x^i y^j , \qquad 0 \leq i + j \leq k.$$

Iz toga zaključujemo da je dimenzija prostora $\Pi_k(\mathbb{R}^2)$ jednaka $\frac{1}{2}(k + 1)(k + 2)$.

Prirodna ideja interpolacije jest za zadane točke odabrati funkcije iz baze nekog prostora polinoma dvije varijable, te zatim načiniti linearnu kombinaciju tih funkcija koja će interpolirati zadane točke. To nije uvijek jednostavno jer se broj funkcija u bazi može razlikovati od broja zadanih točaka. Primjerice, Π_2 ima 6 funkcija u bazi, a Π_3 ima 10 funkcija u bazi. Ako je primjerice zadano 8 točaka, tada treba kombinirati funkcije iz baze za Π_2 i Π_3.

Pretpostavimo da smo odabrali skup funkcija baze čiji je broj jednak broju zadanih točaka. U slučaju funkcije jedne varijable, postoji jedinstveni interpolacijski polinom (vidi primjerice [12], [19]). U slučaju interpolacije u prostoru takva tvrdnja ne može se općenito dokazati. Sljedeći primjeri ilustriraju taj problem.

Neka su zadane četiri točke u prostoru (x_i, y_i, f_i), $i = 1, \ldots, 4$, i označimo neka je $P_i = (x_i, y_i)$. Nadalje, neka je $P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (-1, 1)$, $P_3 = (-1, -1)$, $P_4 = (1, -1)$. Prirodno je odabrati bazne funkcije na sljedeći način: $1, x, y, xy$. Treba pronaći parametre a_1, a_2, a_3, a_4 tako da je:

$$a_1 + a_2 x_i + a_3 y_i + a_4 x_i y_i = f_i, \qquad i = 1, 2, 3, 4. \tag{2}$$

[1] eng. *surface fitting*

Na taj način dobivamo funkciju

$$p(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy, \tag{3}$$

koja interpolira zadane točke. Ova funkcija naziva se *bilinearna* jer pridruživanjem konstantne vrijednosti varijabli x ili varijabli y, dobijemo linearnu funkciju. Općenito, ako restrikcije polinoma dvije varijable na samo jednu od njih daju linearni, kvadratni, kubični polinom, onda takav polinom dvije varijable nazivamo redom *bilinearan*, *bikvadratni*, *bikubični*.

Traženje nepoznatih parametara a_1, a_2, a_3, a_4 svodi se na rješavanje sustava jednadžbi:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= f_1 \\ a_1 - a_2 + a_3 - a_4 &= f_2 \\ a_1 - a_2 - a_3 + a_4 &= f_3 \\ a_1 + a_2 - a_3 - a_4 &= f_4 \end{aligned}$$

koji ima jedinstveno rješenje

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{4}(f_1 + f_2 + f_3 + f_4), \\ a_2 &= \frac{1}{4}(f_1 - f_2 - f_3 - f_4), \\ a_3 &= \frac{1}{4}(f_1 + f_2 - f_3 - f_4), \\ a_4 &= \frac{1}{4}(f_1 - f_2 + f_3 + f_4), \end{aligned}$$

neovisno o vrijednostima f_1, f_2, f_3, f_4.

Međutim, ako je $P_1' = (1, 0),\ P_2' = (0, 1),\ P_3' = (-1, 0),\ P_4' = (0, -1)$, dobivamo sustav

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= f_1 \\ a_1 + a_3 &= f_2 \\ a_1 - a_2 &= f_3 \\ a_1 - a_3 &= f_4 \end{aligned}$$

koji ne mora uvijek biti rješiv (primjerice, ako je $f_1 + f_3 \neq f_2 + f_4$). Dakle, općenito, za proizvoljne funkcijske vrijednosti polinom koji interpolira točke P_i' ne postoji.

Ako krenemo korak dalje s odabirom baznih funkcija i promatramo skup 1, x, y, $x^2 + y^2$, može se pokazati da interpolacijski polinom općenito ne postoji za oba skupa točaka. Zbog ovakvih problema, ali i zbog velike pogreške aproksimacije, direktna polinomna interpolacija nije preporučljiva, osobito ako je skup točaka velik. U tom slučaju, čak i ako postoji interpolacijski polinom, dolazi do ozbiljnih problema u njegovom izračunavanju.

No, iako pokazuju neka loša svojstva, polinomi su i te kako važni u dvodimenzionalnoj interpolaciji i imaju i važne dobre karakteristike. Primijetimo da se u prethodnom primjeru, zapravo radi o kvadratima sa središtem u ishodištu. Dva kvadrata iz primjera mogu se dobiti jedan iz drugoga rotacijom i kontrakcijom, odnosno dilatacijom. Može se pokazati da jedinstveni bilinearni interpolant postoji za svaki kvadrat u svakom slučaju, osim kad je kvadrat rotiran kao u drugom primjeru, tj. kad su mu vrhovi na kooordinatnim osima. Slično, može se pokazati da ako promatramo interpolaciju tri nekolinearne točke u ravnini s zadanim funkcijskim vrijednostima, onda postoji jedinstveni linearni polinom koji interpolira te vrijednosti (vidi primjerice [14]). U oba slučaja interpolacija se najprije može napraviti na nekom odabranom standardnom pravokutniku, odnosno trokutu, a zatim transformirati na zadani pravokutnik odnosno trokut. Ovakve metode postaju važne kada je potrebna interpolacija na mnogo različitih pravokutnika, odnosno trokuta, i predstavlja osnovu računalne implementacije tzv. metode konačnih elemenata.

Kako su spline funkcije vrlo važne u interpolaciji funkcijama jedne varijable, tako su i njihove generalizacije bitne za slučaj dvije varijable. Postoji mnogo načina kako se spline funkcije jedne varijable mogu proširiti na dvije dimenzije. Najjednostavnija je svakako interpolacija produktom. Općenito, problem interpolacije se razdvaja na dva različita slučaja: kada su točke pravilno raspoređene u obliku rešetke te slučaj kad su točke nepravilno raspoređene. U prvom slučaju, spline funkcije se jasno mogu iskoristiti, dok kod nepravilnog rasporeda raste kompleksnost takve generalizacije, pa su splineovi računski manje atraktivni. Takve dvije generalizacije koje se mogu koristiti i na proizvoljno raspoređenim podacima su *Powell-Sabin splineovi* i *simplex splineovi* (više o tome u [7]). Za podatke u rešetki razvijena je i posebna klasa tzv. *box-splineova*, kojoj je posvećeno dosta pažnje u brojnoj literaturi (vidi primjerice [6]). Dvije najvažnije metode za rješavanja problema interpolacije na točkama raspoređenim u rešetki u ravnini su metoda produkta i metoda stapanja funkcija.

2.1. Interpolacija produktom

Problem interpolacije ploha može se nekad riješiti *tenzorskim produktom* (ili kraće produktom) interpolacijskih funkcija jedne varijable. Pretpostavimo da podaci leže na potpunoj pravokutnoj rešetki[2] (mreži) u xy ravnini te da su funkcijske vrijednosti pridružene svakoj točki. Neka je zadano $(m+1)\times(n+1)$ točaka u rešetki, $(m+1)$ u jednom i $(n+1)$ u drugom smjeru. Neka su rubovi rešetke paralelni s koordinatnim osima te neka su svakoj točki pridružene koordinate (x_i, y_j) i brojevi f_{ij} gdje $i = 0, \dots, m,\ j = 0, \dots, n$. Pretpostavimo da vrijedi $x_0 < x_1 < \cdots < x_m$ i $y_0 < y_1 < \cdots < y_n$. Treba odrediti funkciju $f(x, y)$ definiranu na $[x_0, x_m] \times [y_0, y_n]$ za koju vrijedi $f(x_i, y_i) = f_{ij}$ za sve i, j. Specijalno, za rešetku ćemo reći da je *uniformna*, ako su čvorovi $x_0, x_1, \dots, x_m$ i čvorovi $y_0, y_1, \dots, y_n$ uniformno raspoređeni duž x, odnosno y osi. U mnogim praktičnim problemima, točke nisu raspoređene na ovaj način. No, često je slučaj da podaci budu blizu nekoj regularnoj strukturi. Tada je moguće uz određenu obradu, primjerice dodavanjem ili izbacivanjem točaka, modificirati podatke tako da se oni uklapaju u pravokutnu rešetku.

Osnovna ideja kako riješiti ovaj problem interpolacije, jest interpolirati podatke duž linija rešetke paralelnim s koordinatnim osima, te zatim nekako ih kombinirati kako bi dobili funkciju na cijelom pravokutniku. Tehnike interpolacije mogu biti

[2]eng. *lattice, grid*

različite, primjerice, polinomijalna interpolacija ili prirodni kubični interpolacijski spline. Korištenjem interpolacijskog splinea dolazimo do *splineova više varijabli.* Bez obzira koju tehniku koristili, potrebno je konstruirati skup kardinalnih funkcija baze za skupove točaka na liniji. Njih dobijemo tako da za točke na liniji $x_0 < x_1 < \cdots < x_m$, definiramo tzv. i-tu kardinalnu funkciju na sljedeći način

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } i = j \\ 0, & \text{ako je } i \neq j. \end{cases}$$

Na ovaj način dobijemo $m+1$ kardinalnih baznih funkcija $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$. Istim postupkom definiramo kardinalne bazne funkcije $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n$ za točke $y_0 < y_1 < \cdots < y_n$. Od ovako konstruiranih baznih funkcija definirat ćemo $(m+1)(n+1)$ kardinalnih baznih funkcija u ravnini

$$c_{ij}(x,y) = \varphi_i(x)\psi_j(y), \qquad i = 0, \ldots, m, \; j = 0, \ldots, n. \tag{4}$$

Iz definicije ovih funkcija jasno je da one zadovoljavaju sljedeće uvjete u točkama rešetke:

$$c_{ij}(x_k, y_l) = \varphi_i(x_k)\psi_j(y_l) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } k = i \text{ i } l = j \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \tag{5}$$

Dakle, funkcije c_{ij} ponašaju se kao kardinalne funkcije, ali ovaj put na pravokutnoj rešetki. Sada se lako definira funkcija koja interpolira zadane vrijednosti f_{ij} u točkama (x_i, y_j):

$$P(x,y) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} f_{ij} c_{ij}(x,y). \tag{6}$$

Za konstrukciju interpolacijskog polinoma mogu se koristiti i neke druge bazne funkcije, primjerice možemo koristiti B-splineove koji su baza prostora interpolacijskih spline funkcija. Neka su konstruirane baze B-splineova $\bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_1, \ldots, \bar{\varphi}_m$ za $x_0, x_1, \ldots, x_m$ te $\bar{\psi}_0, \bar{\psi}_1, \ldots, \bar{\psi}_n$ za čvorove $y_0, y_1, \ldots, y_m$. Funkcije produkta su sada

$$\bar{c}_{ij}(x,y) = \bar{\varphi}_i(x)\bar{\psi}_j(y), \qquad i = 0, \ldots, m, \; j = 0, \ldots, n, \tag{7}$$

ali one ne zadovoljavaju uvjete kardinalnosti (5). Definirajmo sada funkciju

$$P(x,y) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} \alpha_{ij} \bar{c}_{ij}(x,y), \quad \alpha_{ij} \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Može se pokazati da se parametri α_{ij} mogu na jedinstven način odrediti tako da bude $P(x,y) = f_{ij}$ za svaki $i = 0, 1, \ldots, m$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Tako dobivena ploha podudara se s plohom (6), ali je opisana na drugačiji način. Posebno, ako je tako definirana ploha načinjena od prirodnog kubičnog splinea onda ju nazivamo *bikubična spline ploha*[3], i ona predstavlja funkciju klase C^2 na definiranom pravokutniku. Ovaj naziv često se koristi i za kubične splineove s drugačijim rubnim uvjetima.

Vrijedi sljedeći važni teorem (vidi [14]).

[3]eng. *bicubic spline surface*

Teorem 1. *Neka je $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m$ skup funkcija i $x_0 < x_1 < \cdots < x_m$skup točaka s svojstvom da za bilo koje $f_0, f_1, \dots, f_m$ postoje jedinstveni realni brojevi $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$, takvi da je $\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \varphi_i(x_j) = f_j$ za $j = 0, 1, \dots, m$. Neka funkcije $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n$ imaju isto odgovarajuće svojstvo za točke $y_0 < y_1 < \cdots < y_n$ te neka je*

$$c_{ij}(x, y) = \varphi_i(x)\psi_j(y), \qquad i = 0, \dots, m, \; j = 0, \dots, n.$$

Tada, za svaki skup brojeva f_{ij} postoji jedinstveni odgovarajući skup brojeva α_{ij} takav da funkcija $P(x, y) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} \alpha_{ij} c_{ij}(x, y)$ zadovoljava uvjete interpolacije $P(x_i, y_j) = f_{ij}$ za sve $i = 0, \dots, m, \;\; j = 0, \dots, n$.

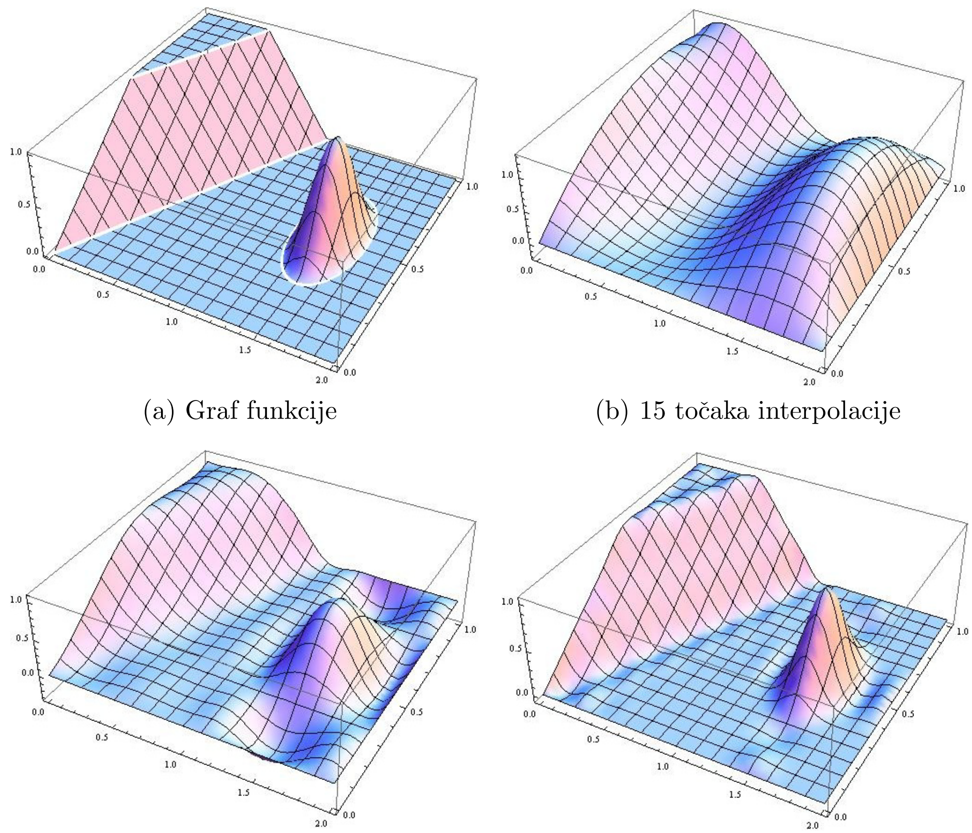
Funkcije nastale produktom intuitivno se najlakše predstavljaju preko kardinalnih baznih funkcija. No, kardinalna baza često nije najbolji odabir za računske svrhe. Računanje i pohrana kardinalnih funkcija ϕ_i i ψ_j može biti vrlo zahtjevno. Za spline tehnike s velikim brojem točaka, uporaba B-splineova za baze pokazuje se kao najpouzdanija s računskog gledišta.

Princip produkta može se koristiti i onda kad su uz funkcijske vrijednosti, poznate i vrijednosti derivacija u zadanim točkama. Ovaj postupak možemo opisati kao proširenje Hermiteove interpolacije na dvije dimenzije (vidi [14]).

Za ilustraciju metode produkta koristit ćemo sljedeći primjer. Promatramo funkciju $f : [0, 2] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & y - x \geq \frac{1}{2} \\ 2(y - x), & 0 \leq y - x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\left(\cos\left(4\pi\sqrt{(x - \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2}\right) + 1\right), & (x - \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{16} \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \tag{9}$$

Na izabranoj rešetci (x_i, y_j), $i = 0, \dots, m, \; j = 0, \dots, n$ odredimo brojeve $f_{ij} = f(x_i, y_j)$ i interpoliramo ove podatke. Model je odabran tako da ima dva ruba na kojima dolazi do prekida prvih derivacija. Graf funkcije prikazan je na slici 1(a). Na slici 1 prikazan je primjer interpolacije funkcije f metodom produkta uz pomoć B-spline funkcija za različiti broj točaka interpolacije. Interpolira se po pravokutnoj rešetki s uniformno raspoređenim točkama. Primjećujemo da povećanjem broja točaka, plohe sve više sliče zadanoj plohi. Slike su izrađene uz pomoć programskog paketa Mathematica.



(a) Graf funkcije

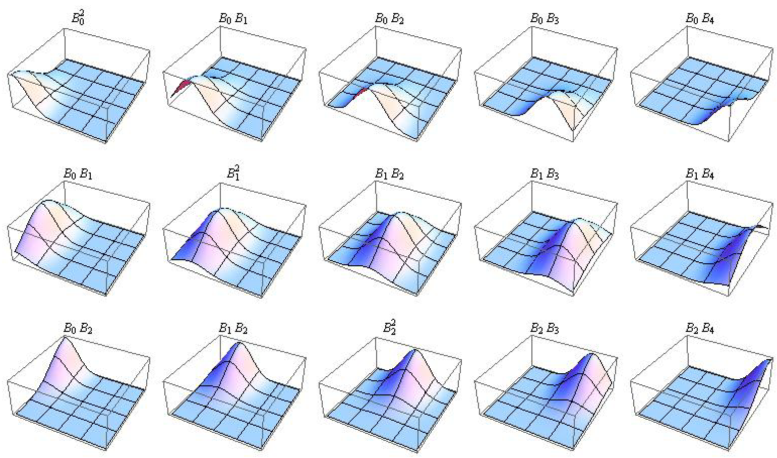
(b) 15 točaka interpolacije

(c) 55 točaka interpolacije

(d) 153 točaka interpolacije

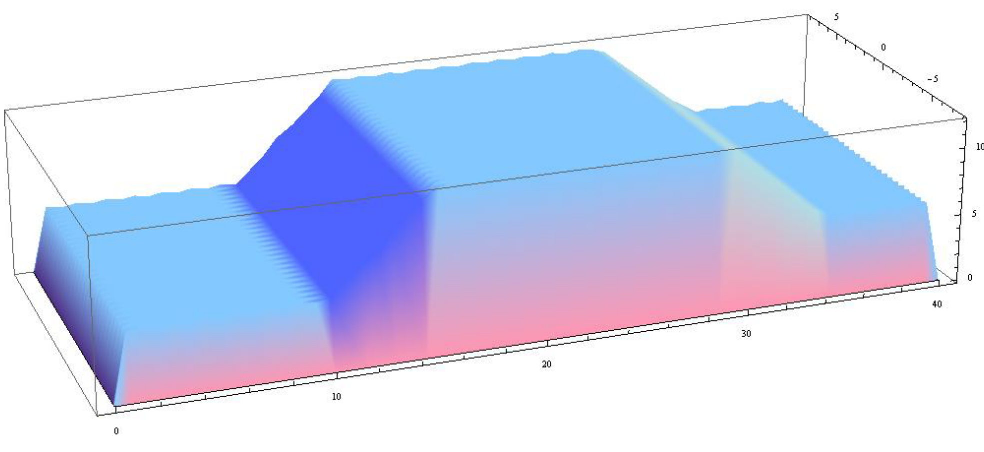
Slika 1. Interpolacija bikubičnim splineom za različiti broj točaka.

U primjeru su korištene B-spline funkcije. Ističu se svojom elegantnom teorijom i dobrim ponašanjem u numeričkim izračunima. Na slici 2 prikazano je 15 B-spline funkcija koje čine bazu za točke interpolacije u slučaju prikazanom slikom 1(b). Linearna kombinacija tih B-spline funkcija daje interpolacijski spline sa slike 1(b). Više o B-spline funkcijama i načinu njihova definiranja može se vidjeti u [12], [14], [15].



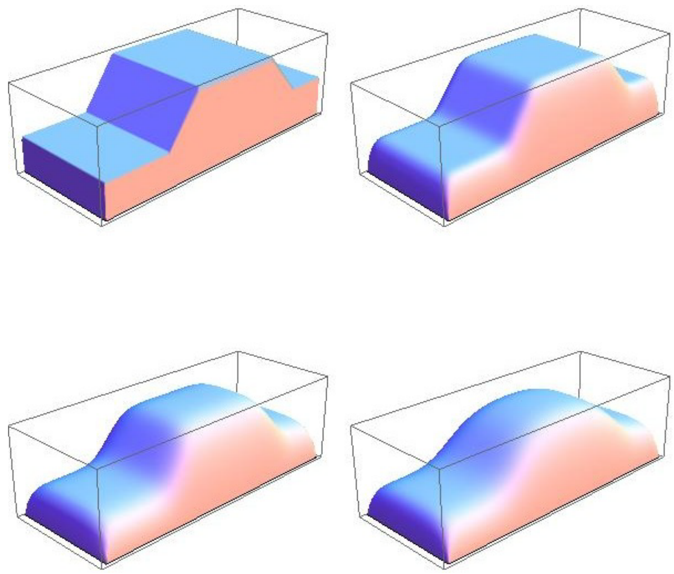
Slika 2. Primjer B-splineova za 15 uniformno raspoređenih točaka na pravokutniku $[0, 2] \times [0, 1]$.

Promotrimo sada jedan praktični primjer koji ilustrira primjenu spline interpolacije. Pretpostavimo da trebamo modelirati karoseriju automobila. U tu svrhu generirali smo 308 točaka koje određuju oblik automobila. Izabrali smo pravokutnu rešetku u xy-ravnini i u svakoj točki te rešetke odredili visinu automobila u toj točki. Na taj način dobili smo prostorne točke koje treba interpolirati. Interpoliramo ih metodom produkta koristeći spline funkcije prvog reda. Rezultat je prikazan na slici 3.



Slika 3. Primjer modeliranja karoserije automobila.

Slični problemi u praksi se rješavaju korištenjem različitih metoda među kojima su najviše zastupljeni NURBS[4] - neunifomne racionalne B-spline funkcije. NURBS plohe predstavljaju svojevrsnu generalizaciju B-splinea i Bezierove krivulje i danas su jedan od osnovih alata za 3D modeliranje. Kada bi se podaci koji opisuju automobil modelirali uz pomoć samo jedne NURBS plohe dobili bi modele prikazane na slici 4. Različite modele dobivamo korištenjem različitog broja kontrolnih točaka, čime utječemo na glatkoću plohe. Modeli se u praksi izrađuju kao spoj većeg broja različitih NURBS ploha. Više o NURBS može se vidjeti u [9], [15].



Slika 4. Primjer modeliranja karoserije automobila pomoću NURBS ploha.

2.2. Ostale metode interpolacije

Osim metode produkta postoji još jedna vrlo zastupljena metoda interpolacije na pravokutnoj rešetki koja se naziva *stapanje funkcija*[5]. Ideja ove metode je pronaći glatku plohu koja interpolira zadane podatke, ali tako da su podaci zadani u obliku funkcija koje predstavljaju presjeke ploha na sjecištima krivulja (za više detalja pogledati [14]).

Mnogi interpolacijski problemi zahtijevaju da ploha bude interpolirana vrijednostima u točkama koje su nejednoliko raspoređene. Problem nepravilno raspoređenih podataka u ravnini zahtijeva puno dublju analizu. Postoji veliki broj metoda kojima se ovaj problem može riješiti. Metode koje rješavaju ovakve probleme općenito su manje točne od metoda za interpolaciju na rešetki. U članku [10] testirane su neke metode interpolacije na proizvoljno odabranim podacima. Najvažnije i najšire korištene općenite metode su *metoda konačnih elemenata*[6], metoda *radijalnih baznih*

[4]eng. *non-uniform rational B-splines*
[5]eng. *blending-function method*
[6]eng. *finite elements method*

funkcija[7] i *kriging*. Metode konačnih elemenata dijeli područje interpolacije na neke osnovne oblike, najčešće pravokutnike ili trokute na kojima se onda interpolira (vidi [11], [14], [16]). Metoda radijalnih baznih funkcija zasniva se na ideji promatranja utjecaja nekih točaka na njima susjedne točke (vidi [16]). Kriging se oslanja na Gaussov proces regresije i po mnogima je najoptimalniji proces višedimenzionalne interpolacije (vidi [14], [16]).

Literatura

[1] C. K. CHUI, *Multivariete Splines*, SIAM, Philadelphia, 1988.

[2] G. W. COLLINS II, *Fundamental Numerical Methods and Data Analysis*, George W. Collins II, 2003.

[3] S.D. CONTE, C. DE BOOR, *Elementary Numerical Analysis - An Algorithmic Approach*, 3rd edition, McGraw-Hill Book Company, New York, 1980.

[4] M.G. COX, *Data Approximation by Splines in One and Two Independent Variables*, The State of Art in Numerical Analysis (A. Iserles, M.J.D. Powell), Claredon Press, Oxford, 1987, 111-138

[5] C. DE BOOR, *Splines as linear combinations of B-splines - A Survey*, Aproximation Theory II(G.G. Lorentz, C.K. Chui, L.L. Schumaker), Academic Press, New York, 1976, 147

[6] C. DE BOOR, K. HOLLIG, S. RIEMENSCHNEIDER, *Box Splines*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[7] P. DIERCKX, *Curve and Surface Fitting with Splines*, Oxford University Press, New York, 1993.

[8] Z. DRMAČ, V. HARI, M. MARUŠIĆ, M. ROGINA, SANJA SINGER, SAŠA SINGER, *Numerička analiza*, Sveučilište u Zagrebu, PMF - Matematički odjel, 2003.

[9] G. FARIN, *NURBS for Curve and Surface Design*, SIAM, Philadelphia, 1991.

[10] R. FRANKE, *Scattered Data Interpolation: Test of Some Methods*, Mathematics of Computation **38**(1982), 181-199

[11] B. HAMANN, *A data reduction scheme for triangulated surfaces*, Computer Aided Geometric Design **11**(1994), 477-489

[12] D.KINCAID, W.CHENEY, *Numerical Analysis*, Brooks/Cole Publishing Company, New York, 1996.

[13] M.J. LAI, *Scaterred data interpolation and approximation using bivariate C^1 piecewise cubic polynomials*, Computer Aided Geometric Design **13**(1996), 81-88

[7] eng. *radial basis function*

[14] P. Lancaster, K. Šalkauskas, *Curve and Surface Fitting, An Introduction*, Academic Press, London, 1986.

[15] D. Marsh, *Applied Geometry for Computer Graphics and CAD*, Springer-Verlag, London, 2005.

[16] W. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical Recipes*, 3rd edition, Cambridge University Press, New York, 2007.

[17] I. J. Schoenberg, *Cardinal Spline Interpolation*, SIAM, Philadelphia, 1973.

[18] L.L. Schumaker, *Fitting surfaces to scattered data*, Aproximation Theory II(G.G. Lorentz, C.K. Chui, L.L. Schumaker), Academic Press, New York, 1976, 203-255

[19] R. Scitovski, *Numerička matematika*, 2. izdanje, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2004.