Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија

Мр Владимир Стојановић (Београд)

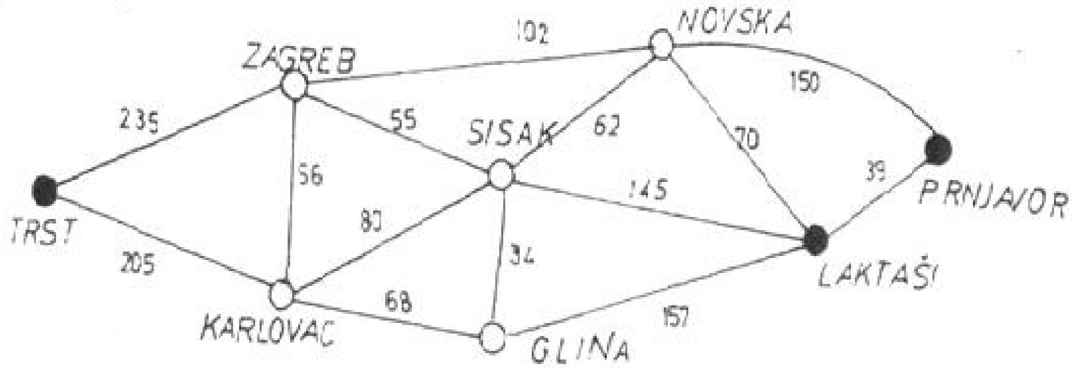
КАКО ШТО БРЖЕ СТИЋИ ДО ЦИЉА

Проблем најкраћег пута

И овог лета су многе породице кренуле на море сопственим аутомобилом. С обзиром на цену бензина, није било безначајно да ли су до циља стигле дужим или краћим путем. Уколико је путна мрежа више изграђена, утолико има више могућности за избор пута и тада је занимљиво и корисно изабрати најкраћи пут.

Један наш пријатељ из босанског места Лакташи управо се спремао на пут за Трст. Узео је аутокарту, према њој начинио скицу каква је представљена на сл. 1, и почео да закључује овако.

Из Лакташа може отићи у Прњавор, у Новску, у Сисак или у Глину. Но, одлазак у Прњавор није узео у обзир, јер би из Прњавора могао само у Новску, у коју може отићи директно, краћим путем. Исто тако није узео у обзир ни директан одлазак у Сисак, јер је одмах опазио да је за њега краће ако иде у Сисак преко Новске. Значи, имао је разлога да из Лакташа крене или у Новску или у Глину.



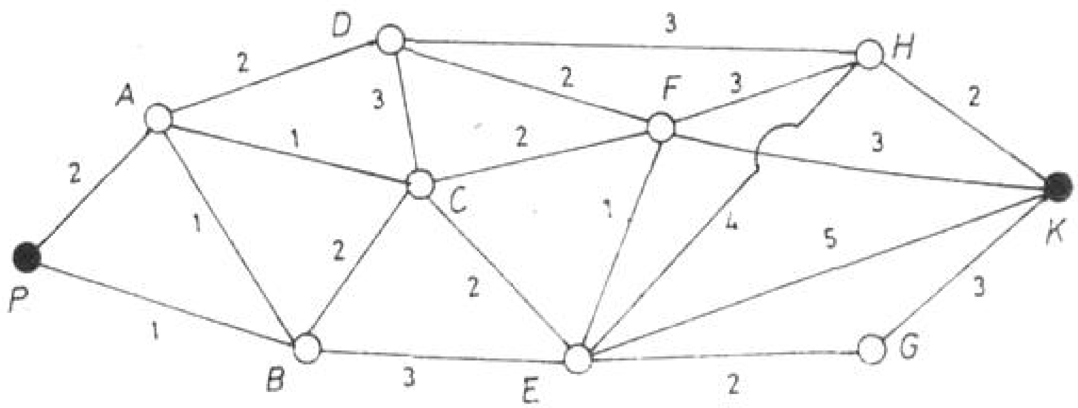
Сл. 1

Из Новске је могао отпутовати у Загреб или у Сисак. Из Глине је могао отпутовати у Сисак или Карловац. Из Сиска је могао отпутовати у Загреб, али би тако дуже путовао до Загреба него ако би отишао тамо директно из Новске; а могао је отпутовати и у Карловац. Из Глине није имао разлога да иде у Сисак, јер би тако дуже путовао до Сиска него ако иде у Сисак преко Новске; а ако би из Глине ишао у Карловац, дуже би путовао до Карловца него ако оде у Карловац преко Новске и Сиска. Према томе, за њега остаје отворено само још питање: да ли му је боље да оде путем Лакташи—Новска до Загреба, или да оде путем Лакташи—Новска—Сисак за Карловац.

А на то питање није тешко одговорити. У првом од ова два случаја имао би да пређе 172 km, а у другом 212 km. Како затим од Загреба до Трста треба да пређе још 235 km, а од Карловца до Трста још 205 km, лако се утврђује да је за њега најекономичније да за Трст иде преко Новске и Загреба.

Тако је овај човек брзо решио питање свог најекономичнијег одласка у Трст. Али питања ове врсте могу бити и знатно компликованија него што је било ово. Зато је потребно наћи један практичан општи метод решавања оваквих питања, који би увек водио најкраћим путем до циља. Ми ћемо тај метод приказати овде на неколико примера.

Пример 1. Нека су P и K полазна и крајња тачка нашег путовања (сл. 2) и нека су B, C, D, E, F, G и H тзв. »пролазне тачке«, тј. места преко којих воде путеви од P до K. Међусобне удаљености ових тачака назначене су бројевима поред нацртаних дужи које спајају ове тачке, но чија дужина не мора одговарати тачно поменутим бројевима. (Лук на путу EH означава да се овај пут и пут FK не пресецају). Одредити најкраћи пут од P до K, користећи скицу са сл. 2.



Сл. 2

Како сад наћи најкраћи пут од P до K? Проблем ћемо решити на следећи начин.

Најпре треба саставити тзв. таблицу одстојања обележених места T_1 (таблицу путева), и то овако.

У први стубац таблице, (в. таблицу T_1) под P, унећемо податке о удаљеностима почетне тачке P од тачака A и B, са којима је она непосредно повезана, и то на првом месту податак $PB=1$, зато што је $PB<PA$.

У други стубац ове таблице, под B (а не под A, зато што се B јавља у првом ступцу пре A) унећемо податке о удаљеностима ове тачке од свих тачака, сем од почетне, са којима је она непосредно повезана, и и то опет почињући од најмање ($BA=1$) и завршавајући са највећом удаљеношћу ($BE=3$).

У трећи стубац ове таблице, под A, унећемо податке о удаљеностима ове тачке од свих тачака, сем од почетне, са којима је она повезана, и то најпре податак $AB=1$, па онда податак $AC=1$, зато што је $AB=AC$, али B се јавља већ у првом ступцу ове таблице, док се C јавља касније, тек у другом ступцу. Затим ћемо унети и податак $AD=2$.

У четврти стубац ове таблице, под C, унећемо податке о удаљеностима ове тачке од свих тачака са којима је она непосредно повезана, и то идући опет редом, од најмање до највеће.

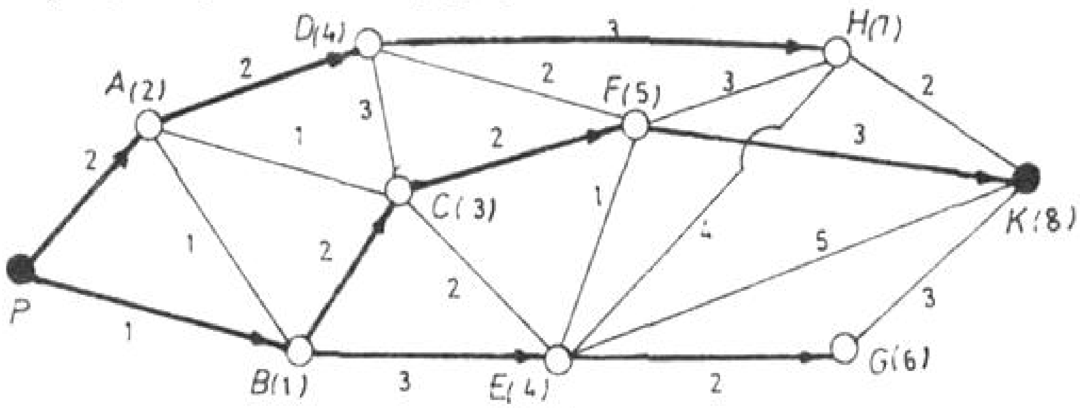
У пети (под E), шести (под D), седми (под F), осми (под G) и девети под H) стубац унесемо одговарајуће податке по истом правилу према којем смо их уносили у четврти стубац, а у десети стубац уписаћемо само K.

P	B	A	C	E	D	F	G	H	K
PB=1	BA=1	AB=1	CA=1	EF=1	DA=2	FE=1	GE=2	HK=2	
PA=2	BC=2	AC=1	CB=2	EC=2	DF=2	FC=2	GK=3	HD=3	
	BE=3	AD=2	CE=2	EG=2	DC=3	FD=2		HF=3	
			CF=2	EB=3	DH=3	FH=3		HE=4	
			CD=3	EH=4		FK=3			
				EK=5					

Таблица T_1

Тако ћемо саставити таблицу T_1, на основу које ћемо радити даље.

Први корак. (Одређујемо најкраћи пут од P до B.) Из прве колоне видимо да је најкраће одстојање од P до B: $PB=1$. Сада у табели и на графу код B означимо минималну удаљеност тачке P од тачака са којима је непосредно повезана, користећи за то ознаку $B(1)$, па елиминишемо (стављањем међу заграде) све остале путеве из ове таблице који се завршавају у B. (Видети таблицу T_2 у којој смо стављали заграде наведене у првом, другом и трећем кораку). Ово елиминисање вршимо јер ниједан од ових путева не може одредити пут који је краћи од PB и самим тим не може бити део најкраћег траженог пута. На графу сада означимо дебљом линијом, са стрелицом на крају, размак PB(сл. 3).



Сл. 3

Други корак. (Одређујемо најкраћи пут од P до A.) У првом ступцу табеле није заграђено, после првог учињеног корака, $PA=2$. У другој колони је $BA=1$. Дакле, од P до A можемо ићи директно и тада је дужина пута 2. Међутим, комбинујући етапу $BA=1$, можемо из P стићи у A и преко B. Како је $B(1)$, добићемо $PBA=1+1=2$. Других директних путева од P до A, или од P преко најближег места B до A нема. Зато у табелу и граф ставимо $A(2)$ а исто тако ставимо у заграде све остале (дуже) путеве који се завршавају у A. То су: BA, CA, DA. Најкраћа удаљеност од P до A је или правцем PA или правцем PBA. Стога дебљом линијом и стрелицом на графу можемо означити BA или PA. На сл. 3 изабрали смо PA.

P	B (1)	A (2)	C (3)	E (4)
PB = 1	(BA = 1)	(AB = 1)	(CA = 1)	EF = 1
PA = 2	BC = 2	(AC = 1)	(CB = 2)	(EC = 2)
	BE = 3	AD = 2	CE = 2	EG = 2
			CF = 2	EB = 3
			CD = 3	EH = 4
				EK = 5

D (4)	F (5)	G (6)	H (7)	K (8)
(DA = 2)	FE = 1	GE = 2	HK = 2	
DF = 2	(FC = 2)	GK = 3	HD = 3	
(DC = 3)	FD = 2		HF = 3	
DH = 3	FH = 3		HE = 4	
	FK = 3			

Таблица T_2

Трећи корак. (Најкраћи пут од P до C.) У другом ступцу није заграђено BC и BE. Изабраћемо краћу деоницу, $BC=2$. Дакле, одређујемо најкраћи пут од P до C. Како је $B(1)$, изабрана деоница одређује дужину пута: $PBC=1+2=3$. У трећем ступцу је $AC=1$ и у овом случају је: $PAC=2+1=3$. Због тога уводимо ознаку $C(3)$, па стављамо у заграде путеве: AC, EC, DC, FC. На графу одаберемо одстојање BC.

Четврти корак. (Најкраћи пут од P до E.) Из $BE=3$ видимо да је $PBE=1+3=4$, а из $CE=2$ је $PCE=3+2=5$. Стога је $E(4)$ и стављамо у заграде: CE, FE, GE, HE. На графу означимо BE.

Пети корак. (Најкраћи пут од P до D.) Из $AD=2$ одређујемо $PAD=2+2=4$ и из $CD=3$ је $PCD=3+3=6$, па узимамо $D(4)$ и ставимо у заграде CD, FD, HD. Означимо на графу AD.

Шести корак. (Најкраћи пут од P до F.) Из $CF=2$, $EF=1$ и $DF=2$ одредимо $F(5)$, ставимо у заграде DF, EF, HF и на графу означимо CF.

Седми корак. (Најкраћи пут од P до G.) Из $EG=2$ одредимо $G(6)$ и на графу означимо EG.

Осми корак. (Најкраћи пут од P до H.) Из $EH=4$, $DH=3$ и $FH=3$ одредимо $H(7)$, ставимо у заграде EH и FH и означимо на графу DH.

Девети корак. (*Тражени најкраћи пут*.) Из $EK=5$, $FK=3$, $GK=3$ и $HK=2$ одредимо $K(8)$, ставимо у заграде EK, GK, HK и на графу означимо FK.

Дакле, најкраћи пут је $PBCFK$, дужине 8. Граф на сл. 3, поред овог, приказује још најкраће путеве и њихове дужине, од P до било којег другог места.

Запазили смо да је било могуће одабрати такође путеве $PACFK$ и $PBEFK$, исте дужине 8. Ми смо овде бирали случајно једну од ових могућности. Ако би се радило заиста о различитим маршутама неког пута, возач би бирао међу путевима једнаке дужине онај који има најмање кривина, успона, и сл.

На описани начин можемо решити сваки сличан задатак. Разуме се, ово тврђење би требало доказати, али за разумевање таквог доказа треба знања много више него што су наши читаоци до сада стекли. Зато ћемо се сада задовољити самом чињеницом да знамо како се до решења долази.

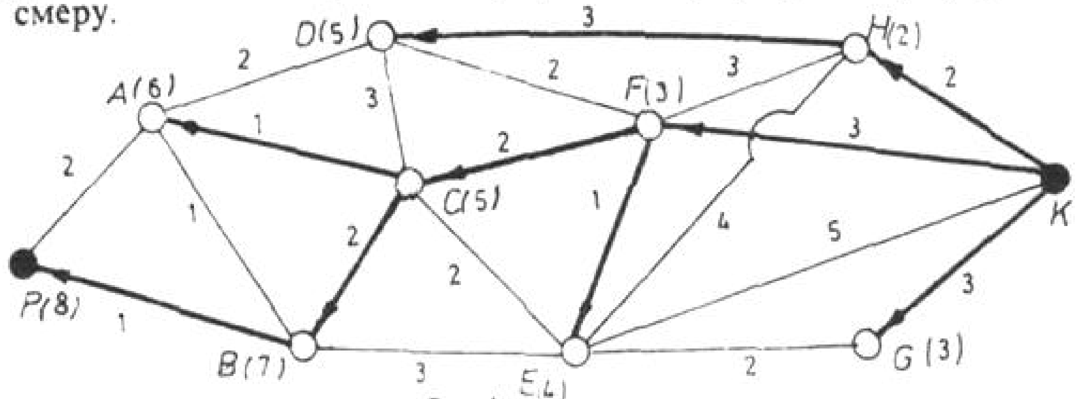
Потражимо сада најкраћи пут у супротном смеру.

Пример 2. Одредити најкраћи пут од K до P према слици 2.

Решење. Користићемо таблицу путева као у претходном случају. Читаоцу препоручујемо да, корак по корак, као што је описано у претходном задатку, уз коришћење доње таблице, сам дође до решења, приказаног графом на сл. 4.

K	**H (2)**	**G (3)**	**F (3)**	**E 4)**	**D (5)**	**C (5)**	**B (7)**	**A (6)**	**P (8)**
KH=2	**HF=3**	**GE=2**	**FE=1**	**EF=1**	**DF=2**	**CA=1**	**BA=1**	**AC=1**	
KG=3	**HD=3**		**FD=2**	**EG=2**	**DA=2**	**CF=2**	**BP=1**	**AB=1**	
KF=3	**HE=4**		**FC=2**	**EC=2**	**DH=3**	**CE=2**	**BC=2**	**AD=2**	
KE=5			**FH=3**	**EB=3**	**DC=3**	**CB=2**	**BE=3**	**AP=2**	
				EH=4		**CD=3**			

Добили смо најкраћи пут *KFCBP*, што је управо исти пут из претходног решења, само у супротном смеру. Ово нам даје за право да код одређивања најкраћег пута не морамо водити рачуна о евентуалној замени почетне и крајње тачке. Добро је да ово знамо, јер се дешава да буде доста једноставније рачунање у супротном смеру.

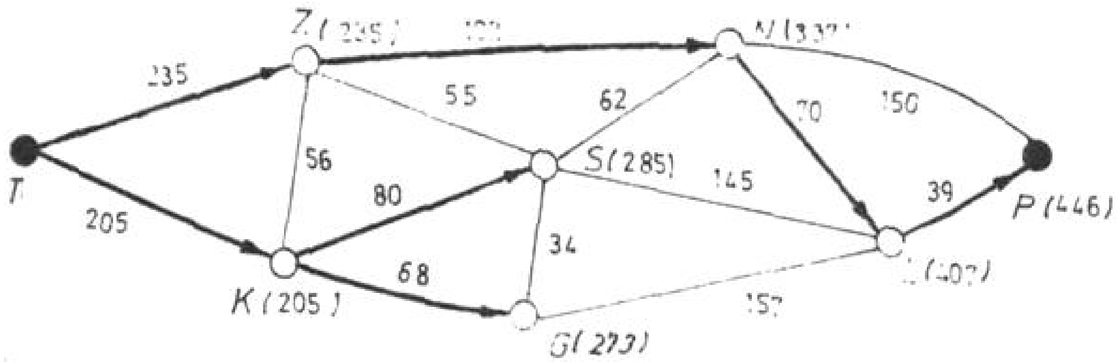


Сл. 4

Пример 3. Помозимо сада суседу нашег пријатеља, који је пошао из Прњавора, да нађе најкраћи пут до Трста.

Решење. Тражићемо решење за пут од Трста до Прњавора. Наведена места означићемо почетним словима њихових имена. Таблица путева и граф решења изгледају овако:

T	**K (205)**	**Z (235)**	**G (273)**	**S (285)**	**N (337)**	**L (407)**	**P (446)**
TK = 205	**KZ = 56**	**ZS = 55**	**GS = 34**	**SG = 34**	**NS = 62**	**LP = 39**	
TZ = 235	**KG = 68**	**ZK = 56**	**GK = 68**	**SZ = 55**	**NL = 70**	**LN = 70**	
	KS = 80	**ZN = 102**	**GL = 157**	**SN = 62**	**NP = 150**	**LG = 157**	
				SK = 80		**LS = 145**	
				SL = 145			



Сл. 5

Најкраћи пут износи 446 km и од Прњавора до Трста стиже се преко *Лакташа*, *Новске* и *Загреба*.