Самоил Малчески
Скопје

СОВРШЕНИ БРОЕВИ

Делители на бројот 6 се: 1, 2, 3 и 6. Притоа важи $1+2+3+6=2\cdot 6$, т.е. збирот на делителите на бројот 6 е два пати поголем од бројот 6. Слично, делители на 28 се: 1, 2, 4, 7, 14 и 28, при што $1+2+4+7+14+28=2\cdot 28$. Ваквите броеви уште во стариот век биле наречени *совршени броеви*. Така ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција. За природниот број $n>1$ ќе велиме дека е *совршен* ако збирот на сите негови позитивни делител (вклучувајќи ги 1 и n) е еднаков на $2n$.

За совршените броеви знаеле уште старите Грци, кои определиле четири вакви броја и тоа: 6, 28, 496 и 8128. Генијалниот математичар на стариот век Евклид (околу 300. год. пне) во IX книга на своето познато дело *Елементи*, ја докажал следнава теорема.

Теорема 1 (Евклид). Ако 2^p-1 е прост број, тогаш $S_p=2^{p-1}(2^p-1)$ е совршен број.

Доказ. Од условот следува дека p е прост број. Навистина, ако $p=qr$, $q,r>1$, тогаш

$$2^p-1=(2^q)^r-1=(2^q-1)((2^q)^{r-1}+(2^q)^{r-2}+...+2^q+1),$$

па како $2^q-1>1$, $(2^q)^{r-1}+(2^q)^{r-2}+...+2^q+1>1$, добиваме противречност. Понатаму, бидејќи 2^p-1 е прост број, сите делители на S_p се:

$$1,2,2^2,...,2^{p-1},1\cdot(2^p-1),2\cdot(2^p-1),2^2\cdot(2^p-1),...,2^{p-1}\cdot(2^p-1).$$

Според тоа, збирот на делителите на бројот S_p е:

$$\begin{aligned}1+2+2^2+...+2^{p-1}+1(2^p-1)+2(2^p-1)+2^2(2^p-1)+...+2^{p-1}(2^p-1)=\\ =1+2+2^2+...+2^{p-1}+(2^p-1)(1+2+2^2+...+2^{p-1})\\ =(2^p-1+1)(1+2+2^2+...+2^{p-1})\\ =2^p(1+2+2^2+...+2^{p-1})\end{aligned}$$

$$= 2^p(2^p - 1) = 2 \cdot 2^{p-1}(2^p - 1)$$
$$= 2S_p,$$

што значи дека S_p е совршен број. ■

Логично е да се запрашаме дали сите парни совршени броеви се од видот $S_p = 2^{p-1}(2^p - 1)$, каде $2^p - 1$ е прост број. Се претпоставува уште старите Грци имале сознание дека тоа е така, но не успеале да го докажат ова тврдење. Дури во XVIII век генијалниот швајцарски математичар Леонард Ојлер тоа го докажал. Така ја имаме следнава теорема.

Теорема 2 (Ојлер). Парен број n е совршен ако и само ако може да се претстави во видот $2^{p-1}(2^p - 1)$ каде $2^p - 1$ е прост број. □

Доказот на теоремата на Ојлер е доста потежок, па затоа истиот нема да го презентираме. Меѓутоа, тој може да се најде скоро во секоја книга од теорија на броеви во која се изучуваат таканаречените мултипликативни функции. Читателите може доказот на ова тврдење да го најдат на страна 61 во книгата [2].

Како што рековме старите Грци ги определиле првите четири парни совршени броеви 6, 28, 496 и 8128, кои се добиваат за простите броеви 2, 3, 5 и 7, соодветно. Меѓутоа, веќе за следниот прост број $p = 11$, бројот $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$ не е прост, па затоа и бројот $S_{11} = 2096128$ не е совршен. Според тоа, за некои прости броеви p бројот S_p е совршен, а за некои тој не е совршен. Следните шеснаесет совршени броеви се добиваат за

$$p = 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281, 2317, 4253, 4423,$$

при што петтиот совршен број е откриен дури во 1460 година, а дваесеттиот е откриен во 1961 година, па до тогаш биле познати само дваесет совршени броеви. Натамошните обиди да се најдат нови совршени броеви, се разбира со помош на компјутери, до 2006 година довеле до откривање на уште дваесет и четири совршени броеви, кои овде нема да ги наведуваме, бидејќи се навистина огромни. Така, четириесет и четвртиот совршен број, кој е откриен во 2006 година е парен број и се запишува со повеќе од 19 милиони цифри. Колку е голем овој број може да се види од фактот дека ако се искористи големина на фонт 11 и страница форматирана во Б5, тогаш за запишување на овој број се потребни приближно 8340 страници.

Во врска со совршените броеви, постојат неколку нерешени проблеми и тоа:

1) Дали постои општа формула која ги определува сите совршени броеви?
2) Дали множеството совршени броеви е бесконечно?
3) До сега се познати само парни совршени броеви, па дали постои непарен совршен број?

Што се однесува до првото прашање, веќе рековме дека со Евклид-Ојлеровата формула е даден обликот на сите парни совршени броеви, но како што видовме определувањето дали број добиен со оваа формула е совршен е поврзано со проверката дали Мерсеновиот број 2^p-1 е прост, што е еквивалентен проблем. Понатаму, многу математичари сметаат дека постојат бесконечно многу прости Мерсенови броеви, што значи дека постојат бесконечно многу совршени броеви. Сепак, одговорот на прашањето 2) не е познат и тоа е до сега еден од најстарите нерешени проблеми. Што се однесува до прашањето 3), до сега не е откриен ниту еден непарен совршен број иако многу математичари веруваат дека не постои непарен совршен број. Но, доказ за тоа нема, па така и ова е еден од најстарите до сега нерешени математички проблеми.

Како што рековме, за совршните броеви многу малку се знае, но сепак на некои математички натпревари може да се сретнат задачи кои се поврзани со истите, како што е следнава задача.

Задача 1 (ЈБМО 2006). Определи ги сите совршени броеви n такви што и двата броја $n-1$ и $n+1$ се прости.

Решение. *Прв начин.* Најмалиот совршен број е 6 и тој се наоѓа меѓу два прости броја: 5 и 7. Ќе докажеме дека нема други совршени броеви со ова својство.

Нека $n-1$ и $n+1$ се прости броеви за некој природен број $n>6$. Тогаш за некој природен број $k>1$ важи

$$n-1=6k-1 \text{ и } n+1=6k+1.$$

Тогаш $n=6k$, па затоа броевите $n,\frac{n}{2},\frac{n}{3},\frac{n}{6}$ се различни делители на бројот n поголеми од 1. Сега од

$$n+\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\frac{n}{6}+1=2n+1>2n$$

следува дека бројот n не е совршен.

Втор начин. Броевите $n-1$ и $n+1$ се прости, па затоа тие се непарни. Според тоа, совршениот број n е парен. Сега, од теоремата на Ојлер следува дека $n=S_p$ за некој прост број p.

Ако простиот број p е непарен, т.е. $p=2k+1$ за некој $k\in\mathbb{N}$, тогаш

$$n=2^{2k+1-1}(2^{2k+1}-1)=2^{2k}(2^{2k+1}-1).$$

Имаме $2^2\equiv1(\mathrm{mod}\,3)$, па затоа $2^{2k}\equiv1(\mathrm{mod}\,3)$ и $2^{2k+1}\equiv2(\mathrm{mod}\,3)$. Според тоа,

$$n=2^{2k}(2^{2k+1}-1)\equiv1\cdot(2-1)=1(\mathrm{mod}\,3),\text{ т.е. } n-1\equiv0(\mathrm{mod}\,3).$$

Значи, $n-1$ е делив со 3, па не може да е прост број.

Ако $p=2$, тогаш $n=6$, а $n-1=5$, $n+1=7$ и ова е единственото решение на задачата. ■

Задача 2. Докажи дека цифра на единиците на парен совршен број секогаш е 6 или 8.

Решение. Парен совршен број има облик $2^{p-1}(2^p-1)$ каде p и $2^{\boldsymbol{p}}-1$ се прости броеви. За $p=2$ тоа е бројот 6. Ако $p>2$, тогаш p е прост број од видот $4k+1$ или $4k+3$.

Ако $p=4k+1$, тогаш $2^{p-1}=2^{4k}=16^k$ и цифрата на единиците на овој број е 6, а цифрата на единиците на бројот $2^p-1=2^{4k+1}-1=2\cdot16^k-1$ е 1. Значи, за $p=4k+1$ цифрата на единиците на бројот $2^{p-1}(2^p-1)$ е 6.

Ако $p=4k+3$, тогаш $2^{p-1}=2^{4k+2}=4\cdot16^k$ и цифрата на единиците на овој број е 4. Цифрата на единиците на бројот 2^p е 8, па затоа цифрата на единиците на бројот 2^p-1 е 7. Конечно, ако $p=4k+3$, тогаш цифрата на единиците на бројот $2^{p-1}(2^p-1)$ е 8. ■

Коментар 1. На крајот од ова наше дружење со совршените броеви, да забележиме дека до денесе немало некоја непосредна практична полза од наоѓањето на совршените броеви. Нивното откривање немало некое посебно влијание дури и на самиот развој на теоријата на броеви. Затоа и некои знаменити математичари, кои ги проучувале совршените броеви, на прашањето зошто се вложува толку голем труд во решавање на проблемите во врска со совршените броеви, едноставо одговориле дека општата цел на секоја наука е да одговори на сите отворени прашања од областа на таа наука. Притоа треба да се има на ум, дека сознанијата до кои се доаѓа при изучување на совршените броеви, можда во иднина ќе придонесат да се одговори на други отворени прашања од теоријата на броеви.

Коментар 2. Покрај совршените броеви, на Питагорејците во V век пне им биле познати таканаречените *пријателски броеви*. Имено, *пријателски* се секои два броја такви што збирот на вистинските делители на едниот број е еднаков на другиот број. На пример, вистински делители на бројот 220 се: 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 и 110, а вистинските делители на бројот 284 се: 1, 2, 4, 71 и 142. Имаме:

$$1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284 \text{ и}$$
$$1+2+4+71+142=220,$$

што значи дека броевите 220 и 284 се пријателски. Питагорејците знаеле само за четири парови такви броеви. Покасно, во XVIII век Леонард Ојлер нашол 65 парови пријателски броеви. На пример, еден пар се броевите 17296 и 18416. Меѓутоа, до денес не е најдена општа формула со чија помош може да се определат вакви броеви, а не се знае ниту дали нивниот број е конечен или бесконечен.

Коментар 3. Во задача 1, ако го испуштиме условот бројот n да е совршен, останува барањето броевите $n-1$ и $n+1$ да се прости. Во тој случај постојат многу решенија и некои од нив се паровите: (3,5), (5,7), (11,13), (17,19), (29,31), (41,43), ... Ваквите парови прости броеви, кои се последователни непарни броеви во литературата се познати како *прости броеви близнаци*. Со зголемувањето на бројот n, бројот на овие парови се намалува. Понатаму, за простите броеви знаеме дека ги има бесконечно многу, меѓутоа проблемот:

4) Дали има бесконечно многу прости броеви близнаци?

кој датира уште од античко време не е решен. Така, познато е дека постои пар прости броеви близнаци секој од кои е запишан со по 51780 цифри. Јасно, до овој резултат е дојдено со проверка со компјутер и скоро никаква друга информација за паровите прости броеви близнаци не е позната. Оттука логично е да се претпостави дека овој проблем уште долго време ќе остане меѓу најстарите нерешени проблеми во теоријата на броеви, но и во математиката воопшто.

Литература

1. Малчески, Р.: Збирка задачи по теорија на броеви, Математички талент, Скопје, 2022
2. Малчески, Р.: Теорија на броеви, Математички талент, Скопје, 2022
3. Малчески, С.: Јуниорски Балкански Математички Олимпијади 1997-2021, Математички талент, Скопје, 2021