ОСНОВНА СВОЈСТВА НЕЈЕДНАКОСТИ И ПРИМЕНЕ У РЕШАВАЊУ ЗАДАТАКА

Ратко Тошић, Нови Сад

Односи неједнакости

Још у нижим разредима основне школе ученици се упознају са појмовима „мање" и „веће" и уче да решавају најједноставније задатке са њима. Касније, оперишући са бројевима, упознају се и са појмовима „мање или једнако" и „веће или једнако", а у вишим разредима основне школе, поред решавања једначина упознају се и са методама решавања неједначина.

У овом чланку користићемо елементарно знање о релацијама „мање или једнако", односно „веће или једнако" у решавању нестандардних задатака.

Претходно ћемо прецизирати појам неједнакости у скупу бројева.

Ако је број x мањи од броја y, пишемо $x < y$ (x мањи од y). Ако је $x < y$, онда кажемо и да је $y > x$ (y веће од x).

На пример, важи:

$$3 < 5;\ \ -4 < 2016;\ \ \frac{4}{7} < 0{,}9;\ \ -3 > -8;\ \ 6 > -1.$$

Чињеницу да број x није већи од броја y записујемо у облику

$$x \le y$$

и читамо „x мање или једнако y" или у облику

$$y \ge x$$

и читамо „y веће или једнако x".

Тако, на пример, важе неједнакости

$$3 \le 4;\ \ 6 \le 6;\ \ 2{,}2 \ge -3;\ \ 0 \ge -111;\ \ 8 \ge 8.$$

За разлику од неједнакости $\le$ и $\ge$, о неједнакостима $<$ и $>$ говоримо као о строгим неједнакостима.

Најважнија својства неједнакости $\le$ у скупу бројева су следећа (аналогно важи и за $\ge$). Овде су a, b, c, d произвољни бројеви:

S1. $a \le a$,

S2. Ако је $a \le b$, онда је $a + c \le b + c$;

S3. Ако је $a \le b$ и $c \le d$, онда је $a + c \le b + d$;

S4. Ако је $a \le b$ и $b \le c$, онда је $a \le c$;

S5. Ако је $a \le b$, онда је $ac \le bc$, за $c > 0$;

S6. Ако је $a \le b$, онда је $ac \ge bc$, за $c < 0$.

Ако је у тачкама 2 – 6, на левој страни бар једна неједнакост строга, онда и на десној страни имамо строгу неједнакост.

Већ на основу наведених особина неједнакости, лако можемо да одговоримо на следећа питања:

1. Крушка је тежа од јабуке, а јабука је тежа од бресквe. Шта је теже: крушка или бресква?

2. Свеска је скупља од оловке, а гумица је јефтинија од оловке. Шта је скупље: свеска или гумица?

3. Ирена, Тања, Кића и Мића брали су печурке. Тања је скупила највише, Ирена више него Мића. Да ли је тачно да су девојчице скупиле више од дечака?

Да бисмо одговорили на питање 2, означимо са s, o, g цене свеске, оловке и гумице, редом. По услову је $s > o$ и $o > g$, одакле је на основу S4, $s > g$; дакле, свеска је скупља од гумице.

За одговор на питање 3, означимо са I, T, K, M број печурки које су скупили Ирена, Тања, Кића и Мића, редом. По услову је $T > I$, $T > K$, $T > M$ и $I > M$. Из $T > K$ и $I > M$, на основу S3 следи да је $I + T > M + K$. Дакле, девојчице су скупиле више печурки од дечака.

На овим најједноставнијим примерима показали смо како примењујемо основна својства неједнакости у решавању задатака. Убудуће ћемо та својства систематски примењивати, а да при томе нећемо сваки пут то изричито наглашавати.

Примена у решавању задатака

Прелазимо сада на решавање мало сложенијих задатака.

1. Девет голубова позобају мање од 1001 зрна кукуруза, а 10 истих таквих голубова позобају више од 1100 зрна. Колико зрна позоба сваки голуб? (Подразумева се да сваки голуб позоба исти број зрна.)

Решење. Како 10 голубова позоба више од 1100 зрна, то ће девет голубова позобати више од $(1100 : 10) \cdot 9 = 990$ зрна. Како је познато да 9 голубова позоба мање од 1001 зрна, а једини број између 990 и 1001 који је дељив са 9 је 999, закључујемо да 9 голубова позоба 999 зрна. Следи да један голуб позоба 111 зрна.

2. Девет свезака може се купити за мање од 10 евра, а за 10 истих таквих потребно је више од 11 евра. Одреди цену једне свеске. (Цена свеске је увек цео број цента.)

Решење. Први услов је еквивалентан томе да је једна свеска јефтинија од $\frac{10}{9}$ евра. Аналогно, други услов значи да је једна свеска скупља од $\frac{11}{10}$ евра. Зато одговор може да буде свака сума већа од 1 евра и 10 центи и мања од 1 евро и $11\frac{1}{9}$ центи. Како је у питању цео број центи, тражена цена је 1 евро и 11 центи.

3. Познато је да 175 јабука кошта више него 125 крушака, а мање него 126 крушака.

а) Докажи да за куповину три јабуке и једне крушке није довољно 80 динара. (Цена сваке воћке износи цео број динара.)

б) Докажи да за куповину три јабуке и једне крушке није довољно чак ни 100 динара.

Решење. а) Нека је цена јабуке x, а цена крушке y (у динарима). По услову задатка је $125y < 175x < 126y$, тј. $0 < 175x - 125y < y$, односно, $0 < 25(7x - 5y) < y$, где је $7x - 5y > 0$. Следи да је $y \geq 26$ и $x > \frac{5}{7}y$, одакле је $x > \frac{5}{7} \cdot 26 = \frac{130}{7} \geq 19$. Следи да је

$$3x + y \geq 3 \cdot 19 + 26 = 83 > 80.$$

б) Уз ознаке као у претходном случају имамо да је број $126y - 175x = 7(18y - 25x)$ дељив са 7, па следи да је

$$y = (126y - 175x) + (175x - 125y) = 7(18y - 25x) + 25(7x - 5y) \geq 7 + 25 = 32.$$

Како је $x > \frac{5}{7}y$, следи да је $x > \frac{5}{7} \cdot 32 = \frac{160}{7} > 22$, тј. $x \geq 23$. Одавде је $3x + y \geq 3 \cdot 23 + 32 = 101$.

4. Вук је појео на празан желудац 3 прасета и 7 јарића и још увек је био гладан. Други пут је појео на празан желудац 7 прасића и једно јаре и прејео се. Да ли ће се Вук заситити ако поједе на празан желудац 11 јарића?

Решење. Означићемо са p и j редом хранљиву вредност прасета и јарета. По услову задатка је

$$3p + 7j < 7p + j,$$

одакле је $6j < 4p$, тј. $j < \frac{2}{3}p$, и даље $4j < \frac{8}{3}p < 3p$. Следи да је $11j = 4j + 7j < 3p + 7j$, што значи да ће вук после конзумирања 11 јарића и даље остати гладан.

5. Терет укупне масе 13,5 тона упакован је у контејнере тако да маса сваког контејнера износи највише 350 килограма. Докажи да сав тај терет може одједном да се превезе са 11 камиона, ако је носивост сваког камиона 1,5 тона. (Маса празног контејнера може се занемарити).

Решење. Постављамо редом контејнере на 8 камиона, и сваки пут кад следећи контејнер не може да се стави на камион (јер се тиме премашује 1,5 тона), ставимо тај контејнер поред камиона. После утоваривања на првих 8 камиона, утоварени контејнери, заједно са онима поред камиона имају укупну масу већу од $8 \cdot 1{,}5 = 12$ тона. Преостали контејнери имају масу мању од 1,5 тона и могу се утоварити у један камион. Како је $4 \cdot 350 = 1400 < 1500$, на једном камиону могу да се превезу било која 4 контејнера од оних што су остали поред камиона. Значи, 8 контејнера који су првобитно остављени поред камиона, могу да се превезу на преостала два камиона. На тај начин цео терет може да се превезе са 11 камиона.

6. Неколико балвана има укупну масу 10 тона, при чему ниједан нема масу већу од 1 тоне. Који је најмањи број камиона носивости 3 тоне са којима се одједном могу да превезу сви ти балвани?

Решење. Као у претходном задатку доказујемо да цео терет може да се превезе са пет камиона носивости 3 тоне. Постављамо редом балване на 3 камиона, и сваки пут кад следећи балван не може да се стави на камион (јер се тиме премашују 3 тоне), ставимо тај балван поред камиона. После утоваривања на прва 3 камиона, утоварени балвани, заједно са онима поред камиона имају укупну масу већу од $3 \cdot 3 = 9$ тона. Преостали балвани имају масу мању од једне тоне и могу се утоварити у један камион. Како је $3 \cdot 1000 = 3000$, на једном камиону могу да се превезу 3 балвана од оних што су остали поред камиона. На тај начин цео терет може да се превезе са 5 камиона.

Нису увек довољна 4 камиона, на пример у случају када имамо 13 балвана исте масе од по $\frac{10}{13}$ тона. У том случају на један камион могу да стану највише три балвана.

7. Збир три различита броја је 10, а разлика највећег и најмањег је 3. Које вредности може имати средњи број по величини?

Решење. Нека је $a > b > c$, $a + b + c = 10$, $a - c = 3$. Из претходне две једначине, елиминишући a, налазимо да је $b + 2c = 7$, при чему је $c + 3 > b > c$, што је еквивалентно са $2c = 7 - b$ и $2c + 6 > 2b > 2c$. Следи да је $13 - b > 2b > 7 - b$, што је еквивалентно са $13 > 3b > 7$, па је $\frac{13}{3} > b > \frac{7}{3}$.

8. За доручком је једна породица попила по једну пуну чашу кафе са млеком, при чему је Мира попила четвртину укупне количине млека и шестину укупне количине кафе. Ниједан члан породице није пио само млеко, нити само кафу. Колико је укупно чељади у породици?

Решење. Нека је n број чељади, а m и k редом количине млека и кафе, изражене у чашама. Јасно је да је $n = m + k$. Из података о Мири следи да је

$$\frac{m}{4}+\frac{k}{6}=1, \tag{1}$$

што се може написати у облику $m+\frac{2}{3}k=4$, одакле је $m + k > 4$. С друге стране, (1) се може написати у облику $\frac{3}{2}m+k=6$, одакле је $m + k < 6$. Како је $n = m + k$, то је $4 < n < 6$, тј. $n = 5$.

9. Од цифара 0, 2, 3, 4, 4, 7, 8, 8, 9 састави деветоцифрени број који је шести степен неког природног броја.

Решење. Како је $988744320 < 10^9 = 1000^3 < 2^{30} < 32^6$, то је тражени број мањи од 32^6, па је основа степена мања од 32. Слично налазимо да је основа степена већа од 20 јер је $203447889 > 2 \cdot 10^8$. Како је збир цифара дељив са 3, основа траженог степена је дељива са 3. Бројеви 21, 24 и 30 отпадају, јер се њихови шести степени завршавају редом цифром 1, цифром 6, са шест нула. Остаје као кандидат за основу само број 27, па провером налазимо да је $27^6 = 387420489$.

10. Марко каже да су две лубенице теже од три диње, а Илија каже да су три лубенице теже од четири диње. Познато је да један од њих двојице увек лаже, а други увек говори истину. Да ли је 12 лубеница теже од 18 дињa? (Претпоставља се да су све лубенице исте масе и све диње исте масе.)

Решење. Нека су l и d редом маса лубенице и маса диње. Марков исказ еквивалентан је са $6l > 9d$, а Илијин са $6l > 8d$. Зато, ако је Марко у праву, онда је у праву и Илија. Како је немогуће да су обојица у праву, то је тачан Илијин исказ, а Марков није. Дакле, тачно је да је $6l > 8d$, тј. $12l > 16d$, а није $6l > 9d$, тј. $12l > 18d$.

Праведна подела јабука

11. На складишту се налази 300 јабука од којих ниједна није лакша од 100 грама нити тежа од 200 грама. Да ли је могуће те јабуке распоредити у 150 пакетића са по две јабуке у сваком тако да важи: не постоје два пакетића таква да је један од њих више од 1,5 пута тежи од другог?

Решење. По услову задатка, ниједна јабука није више од 2 пута тежа од неке друге. Нумеришимо јабуке у неопадајућем поретку по тежини и ставимо у k-ти пакетић јабуке нумерисане са k и $301 - k$. За свака два пакета имамо да су у једном од њих јабуке са масама a и d, а у другом са масама b и c, где је $a \le b \le c \le d$. Имамо да је

$$a + d \le b + 2b = 1{,}5b + 1{,}5b \le 1{,}5b + 1{,}5c = 1{,}5(b + c).$$

С друге стране је

$$b + c \le 2a + d = 1{,}5a + 0{,}5a + d \le 1{,}5a + 0{,}5d + d = 1{,}5a + 1{,}5d = 1{,}5(a + d).$$

Тиме је тврђење доказано.

12. На складишту се налази 300 јабука од којих ниједна није лакша од 100 грама нити тежа од 300 грама. Да ли је могуће те јабуке распоредити у 150 пакетића са по две јабуке у сваком тако да важи: не постоје два пакетића таква да је један од њих више од 2 пута тежи од другог?

Решење. По услову задатка, ниједна јабука није више од 3 пута тежа од неке друге. Нумеришимо јабуке у неопадајућем поретку по тежини и ставимо у k-ти пакетић јабуке нумерисане са k и $301 - k$. За свака два пакета имамо да су у једном од њих јабуке са масама a и d, а у другом са масама b и c, где је $a \le b \le c \le d$. Имамо да је

$$a + d \le b + 3b = 2b + 2b \le 2b + 2c = 2(b + c).$$

С друге стране је

$$b + c \le 3a + d = 2a + a + d \le 2a + d + d = 2a + 2d = 2(a + d).$$

Тиме је тврђење доказано.

13. На складишту се налази 300 јабука од којих ниједна није лакша од 100 грама нити тежа од 300 грама. Да ли је могуће те јабуке распоредити у 75 пакета са по четири јабуке у сваком тако да важи: не постоје два пакета таква да је један од њих више од 1,5 пута тежи од другог?

Решење. Према претходном задатку, јабуке се могу распоредити у 150 пакетића тако да ниједан од њих није више од два пута тежи од другог. Сада применом поступка из задатка 11, тих 150 пакетића можемо распоредити у 75 пакета са по 2 пакетића у сваком тако да важи: не постоје два пакета таква да је један од њих више од 1,5 пута тежи од другог.

Задаци за самостални рад

1. Пера, Васа, Кића и Тића су после риболова бројали своје трофеје. Тића је уловио више риба него Кића, Кића више од Пере, а Пера и Васа заједно су уловили колико Кића и Тића заједно. Које је место заузео сваки од њих по броју уловљених риба?

2. Колико је најмање камиона носивости 3 тоне потребно да би се одједном из каменолома могло да превезе 50 камених блокова чије су масе 370, 372, 374, ..., 468 килограма?

3. Ненад је написао пет бројева, а Станоје је за свака два од тих бројева израчунао њихов збир. На тај начин добио је следећих 10 збирова:

   $$0, 2, 4, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15.$$

   Којих пет бројева је Ненад написао?

4. Бројеви a и b су такви да су збирови $a + b$ и $3a + 2b$ позитивни.
   а) Може ли број $5a + 4b$ бити негативан?
   б) Може ли број $2a + 3b$ бити негативан?

5. Трговац сваког месеца израчунава приход и расход своје фирма. Да ли је могуће да приход буде већи од расхода у сваком периоду од пет узастопних месеци, а да приход у целој години буде мањи од расхода?

6. Павле, Олга, Марина и Драган такмичили су се у решавању задатака и свако од њих је освојио одређен број поена. Павле, Олга и Марина заједно су освојили више од 59 поена; Павле, Олга и Драган имају заједно мање од 51 поена; Павле, Марина и Драган имају заједно мање од 41 поена; Олга, Марина и Драган имају укупно мање од 31 поена. Колико је поена освојио сваки од ових такмичара?

7. Два камиона превозе терет из места A у место B. Ако први камион направи 4 туре, а други 3, они ће укупно да превезу мање од 42 тоне терета. Ако први направи 7 тура, а други 4, они ће укупно да превезу више од 66 тона терета. Који камион има већу носивост?

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија