Др Ратко Тошић (Нови Сад)

ПРОИЗВОД ДВА УЗАСТОПНА ПРИРОДНА БРОЈА

У теорији бројева често нам врло једноставан појам омогућава да формулишемо интересантне задатаке. У овом чланку у ту сврху искористићемо појам производа два узастопна природна броја. Прво ћемо дати неколико једноставних тврђења која се врло лако доказују. Затим ћемо формулисати неколико задатака у чијем се решавању користе та тврђења. Циљ нам је да покажемо како се тривијална тврђења могу искористити у решавању нетривијалних задатака. Саветујемо ученике да претходно самостално докажу сва тврђења и реше задатке и да своја решења упореде са онима која смо ми навели. То је најбољи начин да се читалац упути на самосталан рад у решавању задатака из теорије бројева.

ТВРЂЕЊА:

(I) Производ два узастопна природна броја је паран.

Доказ је очигледан.

(II) За сваки непаран број $n > 1$, број $\frac{1}{4}(n^2 - 1)$ може се представити у облику производа два узастопна природна броја.

Доказ: С обзиром да $n = 2k + 1$, то је $n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1) = 2k(2k + 2) = 4k(k + 1)$, одакле је $\frac{1}{4}(n^2 - 1) = k(k + 1)$.

(III) За произвољан природан број n, између бројева $n(n + 1)$ и $(n + 1)(n + 2)$ не постоји број који је производ два узастопна природна броја.

Доказ следи на основу чињенице да је за $m < n$, $m(m + 1) < n(n + 1)$, док је за $m > n + 1$, $m(m + 1) > (n + 1)(n + 2)$.

(IV) Последња цифра производа два узастопна природна броја је 0, 2 или 6.

Упутство: Посматрати последње цифре два узастопна природна броја и њиховог производа.

(V) Производ два узастопна природна броја или је дељив са 6, или при дељењу са 18 даје остатак 2.

Доказ: Сваки природан број може се написати у облику $6k+i$, где је i цео број, $0 \leq i \leq 5$. За $i = 0,\ 2,\ 3,\ 5$, производ $(6k+i)(6k+i+1)$ је дељив са 6. За $i = 1$ је $(6k+1)(6k+2) = 36k^2+18k+2 = 18(2k^2+k)+2$, а за $i = 4$, $(6k+4)(6k+5) = 36k^2+54k+20 = 18(2k^2+3k+1)+2$.

ЗАДАЦИ:

1. Доказати да ни за један природан број n, број $3n^3+2n^2+n+1$ није производ два узастопна природна броја.

Решење: Како је дати број непаран за било који природни број n, коришћењем тврђења (I) следи да дати број није производ два узастопна природна броја.

2. Доказати да је за сваки природан број n број

$$\frac{1}{4}(n^4+2n^3+3n^2+2n)$$

производ два узастопна природна броја.

Решење: Како је $n^4+2n^3+3n^2+2n = (n^2+n+1)^2-1$, то је дати број облика $\frac{1}{4}(m^2-1)$, где је m непаран број, па коришћењем тврђења (II) следи да се дати број може представити у облику производа два узастопна природна броја.

3. Доказати да се за сваки природан број n, број

$$2(9^n+9^{n-1}+\cdots+9+1)$$

може представити у облику производа два узастопна природна броја.

Упутство: Користити тврђење (I) и чињеницу да се дати број може написати у облику

$$2\cdot\frac{9^{n+1}-1}{8} = \frac{1}{4}((3^{n+1})^2-1).$$

4. Доказати да ни за један природан број n, број $n^2 + 7n + 8$ није производ два узастопна природна броја.

Упутство: Користити тврђење (III), имајући у виду да је

$$(n+2)(n+3) = n^2+5n+6 < n^2+7n+8 < n^2+7n+12 = (n+3)(n+4).$$

5. Доказати да једначина $6^x = y^2 + y - 2$ нема целобројних решења.

Упутство: Користити тврђење (IV) и чињеницу да је једнакост $y^2 + y = y(y+1) = 6^x + 2$ немогућа, јер је последња цифра броја $6^x + 2$ – осмица.

6. Доказати да ни за један природан број n, број $2(6^n + 1)$ не може бити производ два узастопна природна броја.

Упутство: Користити тврђење (IV) и чињеницу да је последња цифра броја $2(6^n + 1)$ – четворка.

7. Наћи све природне бројеве n за које је број $n! + 4$ производ два узастопна природна броја. (Са $n!$ означавамо производ свих природних бројева од 1 до n.)

Упутство: За $n = 5$, број $n!$ се завршава цифром 0, па се дати број завршава цифром 4. Коришћењем тврђења (IV) или (V) за $n \leq 4$, се проверава да услов задовољава само број 2.

8. Доказати да ни за један природан број n, број $3n + 1$ не може бити производ два узастопна природна броја.

Решење: Дати број није дељив са 6. С друге стране, сваки природан број може се написати у облику $6k + i$, где је i цео број, $0 \leq i \leq 5$. Како је $3(6k+i)+1 = 18k+3i+1$, коришћењем тврђења (V) следи да ни за једну вредност i, остатак при дељењу са 18 не може бити једнак 2.

9. Доказати да се никаквом пермутацијом цифара броја 234567890 не може добити број који је производ два узастопна природна броја.

Решење: Дати број при дељењу са 9 даје остатак 8, што значи да при дељењу са 18 даје остатак 8 или 17. С дуге стране, број није дељив са 6 (јер није дељив са 3). (Користити тврђење (V).

10. Доказати да је број $9n+2$ производ два узастопна природна броја ако и само ако је n производ два узастопна природна броја.

Решење: Ако је $n = k(k+1)$, за неки природни број k, онда је $9n+2 = 9k(k+1)+2 = 9k^2+9k+2 = (3k+1)(3k+2)$.

С друге стране, број који при дељењу са 9 даје остатак 2, а производ је два узастопна природна броја, мора бити облика $(3k+1)(3k+2)$ (у противном би био дељив са 9). Међутим, из $9n+2 = (3k+1)(3k+2)$ следи $9n+2 = 9k^2+9k+2 = 9k(k+1)+2$, тј. $n = k(k+1)$. (Користити тврђење (V)).

11. Доказати да је број $8999\ldots91000\ldots02$, где је број деветки једнак броју нула, производ два узастопна природна броја.

Решење: Како је

$$8\underbrace{9\ldots9}_{k-1}1\underbrace{0\cdots00}_{k} = 8\underbrace{9\ldots9}_{k-1}1\cdot 10^k = 9\cdot\underbrace{9\cdots9}_{k}\cdot 10^k = 9\cdot(10^k-1)\cdot 10^k,$$

то је дати број једнак $9\cdot(10^k-1)\cdot 10^k+2$, па на основу задатка 10 следи да је он производ два узастопна природна броја.

то је дати број једнак $9\cdot(10^k-1)\cdot 10^k+2$, па на основу задатка 10 следи да је он производ два узастопна природна броја.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија