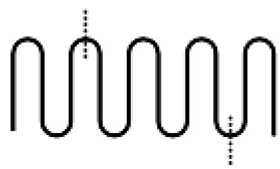
Ристо Малчески
Скопје

КАДЕ Е ГРЕШКАТА?

Задачите кои се задаваат на натпреварите по математика најчесто се задаваат и се проверуваат од комисија, која по правило е составена од поранешни натпреварувачи, кои израснале во знаменити матемтичари. Меѓутоа, дури и во овие случаи не се исклучени грешки, односно можно е на натпреварот да бидат зададени погрешни задачи. Овде ќе дадеме пример на три такви задачи.

1. Јаже со должина $10\,cm$ е свиткано како на цртежот десно. Потоа, јажето е пресечено на двете означени места, со што се добиени три пократки јажиња. Колкави се должините на пократките јажиња?

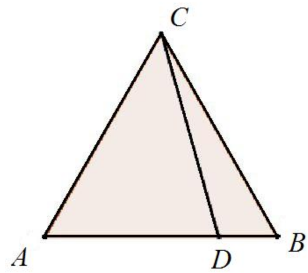


На оваа задача конисијата понудила пет можни одговори, од кои како точен одговор е даден: $3\,cm, 5\,cm, 2\,cm$. Каде е грешката?

Како што можеме да видиме јажето кое е долго $10\,cm$ е завиткано така што тоа има 10 прави делови со должина x и 9 делови во форма на полукружница со ненулта должина $2y$, па затоа $10x+18y=10$. Понатаму, должината на првото пократко јаже е $3x+5y$, должината на ворото пократко јаже е $5x+10y$ и должината на третото пократко јаже е $2x+3y$. Затоа, ако одговорот на задачата е $3\,cm, 5\,cm, 2\,cm$, тогаш треба да важи $3x+5y=3$, $5x+10y=5$ и $2x+3y=2$. Лесно се добива дека решението на овој систем од три равенки со две непознати е $x=1, y=0$, а тоа противречи на фактот дека $y>0$. Јасно, грешката на авторот на задача, а и на комисијата е во тоа што визуелната претстава на задачата соодветствува на равенката $10x+18y=10$, при услови $x,y>0$, а оваа равенка во множеството реални броеви има бесконечно многу решенија. Токму затоа, иако задачата беше зададена за учениците од почетното образование, дел од учениците на натпреварот реагираа дека најблиску до точниот одговор е $3\,cm, 5\,cm,$ $2\,cm$, но на цртежот збирот на должините на крајните јажиња не е еднаков на должината на средното јаже.

Претходната задача беше зададена на меѓународен натпревар, а следните две задачи беа зададени на натпревар во една балканска земја, и тоа за учениците од 3 и 4 одделение во осумгодишното образование. Како што ќе видиме на изглед во двете задачи нема ништо спорно, но истите содржат фундаментални грешки.

2. Даден е рамностран триаголник $\triangle ABC$ со должина на страна $4\,cm$. Точката D припаѓа на страната AB, при што отсечката AD е три пати поголема од отсечката BD. Определи ја должината на отсечката CD, ако периметарот на $\triangle ABC$ е $3\,cm\,5\,mm$ поголем од периметарот на $\triangle BCD$.



„Решение“. Имаме, $\overline{AD} = 3\overline{BD}$ и како $\overline{AD} + \overline{BD} = 4$, добиваме $4\overline{BD} = 4$, т.е. $\overline{BD} = 1\,cm$. Периметарот на $\triangle ABC$ е еднаков на $3 \cdot 4 = 12\,cm$, а периметарот на $\triangle BCD$ е еднаков на

$$1 + 4 + \overline{CD} = \overline{CD} + 5\,cm\,.$$

Според тоа,

$$12\,cm = \overline{CD} + 5\,cm + 3\,cm\,5\,mm$$

$$12\,cm = \overline{CD} + 8\,cm\,5\,mm$$

$$\overline{CD} = 12\,cm - 8\,cm\,5\,mm$$

$$\overline{CD} = 3\,cm\,5\,mm,$$

и тоа е решението кое комисијата го дава како одговор на задачата.

Во условот и во горното „решение“ на дадената задача на изглед нема ништо спорно. Меѓутоа задачата е грешна. Навистина, $\triangle ABC$ е рамностран, па затоа неговата висина е $h = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\,cm$. Значи, ако C' е подножната точка на висината на $\triangle BCD$, тогаш таа е средина на страната AB и затоа

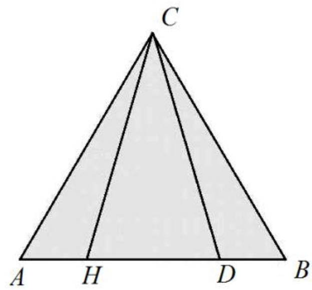
$$\overline{C'D} = \overline{C'B} - \overline{DB} = 2 - 1 = 1\,cm\,.$$

Сега, согласно Питагоровата теорема треба да важи

$$1 = \overline{C'D} = \sqrt{\overline{CD}^2 - \overline{CC'}^2} = \sqrt{3{,}5^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{12{,}25 - 12} = 0{,}5\,,$$

што не е точно.

3. Даден е рамностран триаголник $\triangle ABC$ со должина на страна $8\,cm$. Точките D и H припаѓаат на страната AB, при што отсечката AD е три пати подолга од отсечката BD, а отсечката AH е три пати пократка од отсечката AD. Определи го периметарот на $\triangle CHD$, ако периметарот на $\triangle ABC$ е $7\,cm$ поголем од периметарот на $\triangle BCD$.



„Решение“. Имаме, $\overline{AD} = 3\overline{BD}$ и како $\overline{AD} + \overline{BD} = 8$, добиваме $4\overline{BD} = 8$, т.е. $\overline{BD} = 2\,cm$. Според тоа, $\overline{AD} = 6\,cm$. Сега бидејќи отсечката AH е три пати пократка од отсечката AD, добиваме дека од $\overline{AH} = \overline{BD} = 2\,cm$. Периметарот на $\triangle ABC$ е еднаков на $3 \cdot 8 = 24\,cm$, а периметарот на $\triangle BCD$ е еднаков на

$$2 + 8 + \overline{CD} = \overline{CD} + 10\,cm.$$

Според тоа,

$$24\,cm = \overline{CD} + 10\,cm + 7\,cm$$
$$24\,cm = \overline{CD} + 17\,cm$$
$$\overline{CD} = 7\,cm.$$

Слично се добива дека $\overline{CH} = 7\,cm$ и како

$$\overline{HD} = \overline{AB} - (\overline{AH} + \overline{DB}) = 8 - (2+2) = 4\,cm,$$

за периметарот на $\triangle CHD$ добиваме

$$\overline{CH} + \overline{HD} + \overline{DC} = 7 + 4 + 7 = 18\,cm,$$

и тоа е решението кое комисијата го дава како одговор на задачата.

И во овој случај на прв поглед изгледа дека како во условот, така и во одговорот на задачата нема ништо спорно. Но, како и во претходната задача и овде имаме противречност со Питагоровата теорема. Навистина, $\triangle ABC$ е рамностран, па затоа неговата висина е $h = 4\sqrt{3}\,cm$. Значи, ако C' е подножната точка на висината на $\triangle BCD$, тогаш таа е средина на страната AB и затоа $\overline{C'D} = 4 - 2 = 2\,cm$. Според тоа, треба да важи

$$2 = \overline{C'D} = \sqrt{\overline{CD}^2 - \overline{CC'}^2} = \sqrt{7^2 - (4\sqrt{3})^2} = 1,$$

што не е точно.