Osječki matematički list 18 (2018), 45-57

Brzina u prirodnim i društvenim znanostima

Anja Corn*

Sažetak

U matematici, diferencijalni i integralni račun predstavljaju osnove infinitezimalnog računa koji imaju široku primjenu u svim znanostima. Pojam derivacije nezavisno su uveli engleski matematičar, fizičar i astronom Isaac Newton i njemački matematičar, fizičar i filozof Gottfried Wilhelm Leibniz. Newton je do koncepta derivacije došao proučavajući problem brzine tijela u danom trenutku, dok se Leibniz bavio problemom tangente na danu krivulju. U ovom radu prikazat ću neke primjene derivacije kao mjere promjene u fizici, biologiji, kemiji te ekonomiji.

Ključne riječi: *derivacija, mjera promjene*

Rates of change in natural and social science

Abstract

In mathematics, the differential and integral calculus are the basics of calculus, which is widely used in all sciences. The notion of derivative was independently introduced by English mathematician, physicist and astronomer Isaac Newton and German mathematician, physicist and philosopher Gottfried Wilhelm Leibniz. Newton came to the concept of derivative by studying the problem of the instantaneous velocity, while Leibniz dealt with the problem of tangent to a given curve. In this paper, we will present application of the derivative as a rate of change in physics, biology, chemistry and economics.

Keywords: *derivative, rate of change*

*Fakultet elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija Osijek, Sveučilište u Osijeku, email: anja.corn@ferit.hr

Isaac Newton (1642. – 1717.), engleski fizičar, matematičar i astronom.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646. – 1716.), njemački fizičar, matematičar i filozof.

1 Pojam derivacije

Isaac Newton i Gottfried Wilhelm Leibniz nezavisno su jedan o drugome došli do koncepta derivacije funkcije. Newton je do tog koncepta došao 1666. godine proučavajući problem brzine tijela u danom trenutku, dok je Leibniz do toga došao 1674. godine baveći se problemom tangente na graf funkcije. Iako se Newton počeo tim problemom baviti prije Leibniza, Leibniz je bio prvi koji je objavio svoje zaključke.

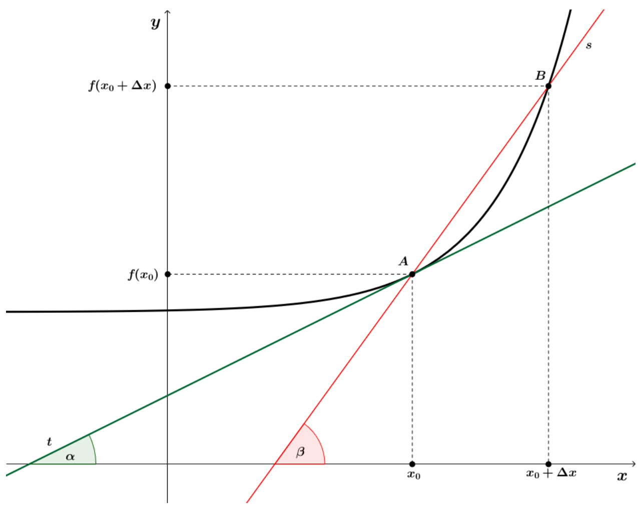
Pogledajmo prvo Leibnizov pristup problemu tangente. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ proizvoljna funkcija, $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval i $x_0 \in I$. Promotrimo sekantu grafa funkcije f kroz točke $A = (x_0, f(x_0))$ i $B = (x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ (*slika* 1). Nagib sekante, odnosno njen koeficijent smjera dan je izrazom

$$k_s = \operatorname{tg} \beta = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Kako se točka B približava točki A, tako se Δx približava 0 pa, ako je funkcija u točki x_0 „dovoljno lijepa“, sekanta prelazi u tangentu. Stoga je

$$k_t = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{1}$$

Broj dan izrazom (1) naziva se derivacija funkcije f u točki x_0 (uz pretpostavku da postoji taj limes). Stoga se derivacija funkcije u točki x_0 može geometrijski interpretirati kao nagib tangente u pripadnoj točki grafa.



Slika 1: Problem tangente

Analizirajmo sada derivaciju kao alat za računanje brzine u fizici. Neka se materijalna točka giba po pravcu te se u času t nalazi na mjestu $s(t)$. Ukoliko se materijalna točka krene gibati u trenutku t_0, a završi u trenutku $t_0 + \Delta t$ tada je prešla put $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$. Prosječna brzina kojom se ona gibala iznosi:

$$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Pretpostavimo da nas zanima prosječna brzina kojom se giba materijalna točka, ali na sve kraćim i kraćim intervalima ($\Delta t \to 0$). U tom slučaju definiramo trenutnu brzinu u trenutku t_0 kao limes prosječne brzine, odnosno

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Stoga brzinu možemo definirati kao mjeru promjene položaja tijela u jedinici vremena.

Na temelju Leibnizovog i prethodnog pristupa derivaciji uvodimo sljedeću definiciju:

Definicija 1.1. Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval. Kažemo da je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ *derivabilna* ili *diferencijabilna* u točki $x_0 \in I$, ako postoji limes

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{2}$$

Ako limes (2) postoji, zovemo ga *derivacija* funkcije f u točki x_0 i označavamo s $f'(x_0)$.

2 Brzina u prirodnim i društvenim znanostima

U svakom području života u kojemu dolazi do promjena, pojam derivacije je od velike važnosti jer njenom primjenom ljudi mogu uvelike utjecati na poboljšanje kvalitete života. Iz tog razloga, u ovom poglavlju prikazat ćemo neke od primjena brzine u fizici, kemiji, biologiji i ekonomiji.

2.1 Fizika

Kao što je već spomenuto u Newtonovom pristupu derivaciji, *brzina* predstavlja mjeru promjene položaja tijela u jedinici vremena, $v(t) = s'(t)$ i mjeri se u m/s. Tijelo tijekom gibanja može ubrzavati ili usporavati. Navedenu promjenu pri gibanju nazivamo *akceleracija*, te se ona definira kao promjena brzine u ovisnosti o vremenu t i označava s $a(t) = v'(t)$. Ukoliko tijelo ubrzava tada je akceleracija pozitivnog predznaka, dok negativni predznak označava usporavanje. U kinematici postoji primjena i treće derivacije puta, što predstavlja mjeru promjene akceleracije i naziva se *trzaj*. Oznaka za trzaj u trenutku t je $j(t) = a'(t)$ i mjeri se u $\mathrm{m/s^3}$.

Također, derivacija je pronašla svoju primjenu i u dinamici. Ukoliko količinu gibanja p izrazimo pomoću $p = mv$, pri čemu je m masa tijela, a v njegova brzina tada *Drugi Newtonov zakon* kaže: Brzina promjene količine gibanja jednaka je sili F koja djeluje na tijelo. Odnosno, kod pravocrtnog gibanja

$$F = \frac{d}{dt}(mv).$$

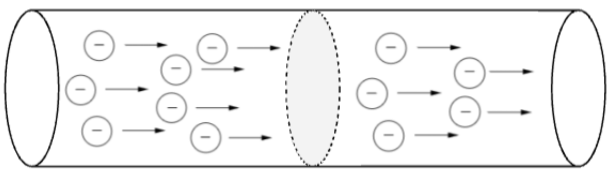
Ukoliko je masa konstantna, gornji izraz ekvivalentan je jednostavnijem izrazu

$$F = m\frac{dv}{dt} = ma\,.$$

Još jedna od primjena pojavljuje se u elektromagnetizmu. Ukoliko promatramo količinu naboja koji prođe presjekom vodiča u jediničnom vremenskom intervalu, tada dobivamo *jakost struje*. Ako $I(t)$ predstavlja jakost struje u trenutku t, a $Q(t)$ količinu naboja u istom trenutku tada je

$$I(t) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = Q'(t).$$

Mjerna jedinica za jakost struje je amper[1] (A).



Slika 2: Protok naboja kroz vodič

Zadatak 1. Točka mase m titra uzduž osi x tako da je u trenutku t njena udaljenost od ravnotežnog položaja dana jednadžbom

$$x(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \varphi_0),$$

[1]Mjerna jedinica je dobila naziv po francuskom matematičaru, fizičaru, kemičaru i filozofu A. M. Ampèreu (1775. – 1836.)

gdje su: A amplituda, λ faktor prigušenja, ω frekvencija te φ_0 početna faza. Odredi brzinu gibanja točke, njeno ubrzanje te silu koja djeluje na nju.

Rješenje. Brzinu gibanja točke određuje derivacija puta, odnosno

$$\begin{aligned} v(t) &= x'(t) \\ &= -\lambda A e^{-\lambda t}\cos(\omega t+\varphi_0) - \omega A e^{-\lambda t}\sin(\omega t+\varphi_0) \\ &= -Ae^{-\lambda t}\big(\lambda\cos(\omega t+\varphi_0)+\omega\sin(\omega t+\varphi_0)\big), \end{aligned}$$

a ubrzanje iznosi

$$\begin{aligned} a(t) &= v'(t) \\ &= \lambda A e^{-\lambda t}\big(\lambda\cos(\omega t+\varphi_0)+\omega\sin(\omega t+\varphi_0)\big)- \\ &\quad - Ae^{-\lambda t}\big(-\lambda\omega\sin(\omega t+\varphi_0)+\omega^2\cos(\omega t+\varphi_0)\big) \\ &= Ae^{-\lambda t}\big((\lambda^2-\omega^2)\cos(\omega t+\varphi_0)+2\lambda\omega\sin(\omega t+\varphi_0)\big). \end{aligned}$$

Sila koja djeluje na točku dobije se uz pomoć formule $F(t) = ma(t)$. Stoga sila iznosi

$$F(t) = mAe^{-\lambda t}\Big((\lambda^2-\omega^2)\cos(\omega t+\varphi_0)+2\lambda\omega\sin(\omega t+\varphi_0)\Big).$$

2.2 Kemija

U kemiji je važan objekt proučavanja *kemijska reakcija* koja se definira kao *proces u kojemu se pregrupiraju kemijske veze pri čemu nastaju nove tvari* ([3]). Ne odvijaju se sve kemijske reakcije jednako brzo, te su kemičari istražujući došli do zaključka kako na brzinu kemijske reakcije utječu koncentracije, temperatura, agregatno stanje reaktanata, građa čestica te katalizatori.

Neka, primjerice, kemijska reakcija ima jednadžbu

$$A + B \to C + D,$$

pri čemu su s A i B označeni reaktanti, a s C i D produkti. Množinska koncentracija tvari je omjer množine tvari i volumena otopine, označava se s $[A]$ te se mjeri u molima po litri pri čemu 1 mol iznosi $6.022\cdot 10^{23}$ molekula.

Koncentracije se tijekom reakcije mijenjaju, stoga veličine $[A]$, $[B]$, $[C]$ i $[D]$ ovise o vremenu t. Prosječna brzina kojom se stvara produkt C u vremenskom intervalu $\langle t_1, t_2\rangle$ dana je izrazom

$$\frac{\Delta[\mathrm{C}]}{\Delta t} = \frac{[\mathrm{C}](t_2)-[\mathrm{C}](t_1)}{t_2-t_1}.$$

Tijekom kemijske reakcije koncentracije reaktanata se smanjuju, a koncentracije produkata rastu.

Za proučavanje kinetike kemijske reakcije kemičarima je od veće važnosti brzina reakcije koja se definira s

$$[C]'(t) := \frac{d[C]}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta[C]}{\Delta t}.$$

$$v = \frac{1}{\nu_J} \frac{d[J]}{dt}$$

gdje je ν_J stehiometrijski koeficijent sudionika J (za reaktante se stehiometrijski koeficijent uzima s negativnim predznakom).

Na primjer, neka kemijska reakcija ima jednadžbu

$$\mathrm{Zn} + 2\,\mathrm{H\,Cl} \to \mathrm{Zn\,Cl_2} + \mathrm{H_2}.$$

Tada je

$$v = -\frac{d[\mathrm{Zn}]}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{d[\mathrm{H\,Cl}]}{dt} = \frac{d[\mathrm{Zn\,Cl_2}]}{dt} = \frac{d[\mathrm{H_2}]}{dt}$$

tj., brzina kojom se troši cink Zn jednaka je brzini kojom se stvara cinkov klorid $\mathrm{Zn\,Cl_2}$, ali je brzina kojom se troši solna kiselina $\mathrm{H\,Cl}$ dvostruko veća od brzine kojom se stvara cinkov klorid.

Zadatak 2. Promotrimo kemijsku reakciju u kojoj iz jedne molekule reaktanta A i jedne molekule reaktanta B nastaje jedna molekula produkta C:

$$A + B \to C$$

te neka na početku kemijske reakcije koncentracije reaktanata iznose $[A] = [B] = m$ mol/l. Neka je tada koncentracija produkta C dana izrazom

$$[C](t) = \frac{m^2kt}{mkt+1}, \quad k = konst.$$

1. Odredite brzinu kemijske reakcije u trenutku t.
2. Što se događa s koncentracijom produkta za $t \to \infty$?
3. Što se događa s brzinom kemijske reakcije za $t \to \infty$?

Rješenje. 1. Brzina kemijske reakcije u trenutku t iznosi

$$\begin{aligned}\frac{d[C]}{dt} &= \frac{m^2k(mkt+1) - m^2kt \cdot mk}{(mkt+1)^2} \\ &= \frac{m^2k}{(mkt+1)^2}.\end{aligned}$$

2. Kako bismo saznali što se događa s koncentracijom nakon dovoljno vremena potrebno je odrediti sljedeći limes:

$$\lim_{t\to\infty} C[t] = \lim_{t\to\infty} \frac{m^2kt}{mkt+1} = m.$$

Odatle zaključujemo da ako kemijska reakcija traje dovoljno dugo, tada se koncentracija produkta približava koncentracijama reaktanata na početku kemijske reakcije.

3. Kako bismo saznali što se događa s brzinom kemijske reakcije nakon dovoljno vremena potrebno je odrediti sljedeći limes:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{d[C]}{dt} = \lim_{t\to\infty} \frac{m^2k}{(mkt+1)^2} = 0.$$

Odatle zaključujemo kako se s vremenom brzina kemijske reakcije smanjuje te da se nakon određenog vremena više ne može opaziti promjena. ◄

2.3 Biologija

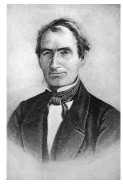
Neka $P(t)$ predstavlja broj jedinki u nekoj populaciji (ljudi, biljke, životinje, bakterije, ...) u vremenskom trenutku t. Tada $P'(t)$ opisuje brzinu rasta populacije u tom trenutku. Važno je primijetiti kako je broj jedinki prirodan broj, stoga se ne može govoriti o derivabilnosti funkcije P. Međutim, kod velikog broja populacije funkciju P možemo aproksimirati nekom glatkom funkcijom. Sljedeća dva modela pokazat će kojim funkcijama se najčešće aproksimira P.


Thomas Robert Malthus (1766. – 1834.), engleski demograf.

Prvi je *Malthusov model* koji je najjednostavniji model za promatranje brzine rasta populacije. Malthus je pretpostavio kako je *brzina rasta populacije u trenutku t proporcionalna broju jedinki u tom trenutku*:

$$\frac{dP(t)}{dt} = kP(t).$$

Ukoliko je $k < 0$ tada se radi o padu populacije, a za $k > 0$ o rastu populacije. Rješenje ove diferencijalne jednadžbe je $P(t) = P(0)e^{kt}$, odnosno funkcija P aproksimirana je eksponencijalnom funkcijom. Navedeni model nije precizan jer predviđa kontinuirani rast populacije, što dovodi do neograničenog rasta populacije. No, to u stvarnosti nije moguće jer prirodni sustavi najčešće zbog ograničenja svojih resursa ne mogu prihvatiti neograničenu populaciju.



Pierre Verhulst (1804. – 1849.), belgijski matematičar.

Promotrimo precizniji model koji je predložio matematičar Verhulst . On je pretpostavio kako je brzina rasta populacije u ograničenom životnom prostoru u trenutku t proporcionalna broju jedinki $P(t)$ u tom trenutku i ovisi o veličini biološkog potencijala. Njegov model je korektniji jer populacija P u početku raste eksponencijalno, ali približavanjem maksimalnom biološkom potencijalu njen rast se smanjuje. Razlog tome je što tada dolazi do borbe za hranom, prostorom, itd. *Verhulstov model* poznat je još i pod nazivom *logistički model* te je dan izrazom

$$\frac{dP}{dt} = kP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{K}\right),$$

pri čemu K označava maksimalni biološki potencijal. Rješenje ove diferencijalne jednadžbe je

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K-P(0)}{P(0)}\right)e^{-kt}}.$$

U sljedećim zadacima mogu se vidjeti još neki primjeri brzine u biologiji.

Zadatak 3. Broj stanica kvasca u laboratoriju na početku naglo se povećava, no polako opada brzina povećanja. Populacija kvasca modelirana je funkcijom

$$P(t) = \frac{a}{1 + be^{-0.7t}},$$

gdje je vrijeme t mjereno u satima. U trenutku $t = 0$ populacija kvasca iznosi 20 stanica i raste brzinom od 12 stanica na sat. Pronađite vrijednost konstanti a i b. Prema ovom modelu, što se događa s brojem stanica kvasca gledano dugoročno?

Rješenje. Uvrštavanjem $P(0) = 20$ dobivamo

$$20 = \frac{a}{1 + be^{-0.7\cdot 0}},$$

odakle slijedi da je $a = 20(1 + b)$.
Brzina rasta populacije kvasca dana je formulom

$$\frac{dP}{dt} = P'(t) = \frac{0.7abe^{-0.7t}}{(1 + be^{-0.7t})^2}$$

te uvrštavanjem iz uvjeta zadataka $P'(0) = 12$ dobivamo

$$12 = \frac{0.7ab}{(1+b)^2}.$$

Primijetimo kako za konstantu b vrijedi $b \neq -1$, u suprotnom funkcija ne bi bila dobro definirana. Uvrštavanjem $a = 20(1+b)$ u posljednji izraz dobivamo sljedeće vrijednosti: $b = 6$ i $a = 140$. Kako bismo odredili što se događa s brojem stanica kvasca nakon dovoljno dugo vremena potrebno je izračunati sljedeći limes:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{140}{1+6e^{-0.7t}} = 140.$$

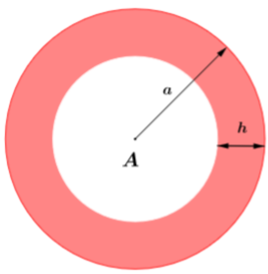
Iz gornjeg izraza zaključujemo kako nakon dovoljno dugo vremena broj stanica kvasca naraste do 140 te više ne raste. ◀

Zadatak 4. Arterioskleroza počinje tijekom djetinjstva kada se naslage (mekani slojevi masnog tkiva) oblikuju na stijenkama arterija (slika 3), blokirajući krvotok kroz arterije te zbog toga arterioskleroza dovodi do srčanih udara i gangrene.

Pretpostavimo da je idealni presjek aorte u abdomenu krug s polumjerom $a = 1$ cm te pretpostavimo, kao što je navedeno u [6], da je debljina naslaga h mjerena u cm dana izrazom

$$h = g(t) = 1 - 0.01\sqrt{10\,000 - t^2},$$

pri čemu t označava starost mjerenu u godinama. Odredite stopu kojom se protočno područje aorte smanjuje u trenutku kada je osoba stara 40 godina.



Slika 3: Presjek aorte

Rješenje. Područje aorte koje nije zahvaćeno naslagama predstavlja površinu kruga polumjera $r = 1 - h$ te se dobiva po formuli $A = f(h) =$

$\pi(1-h)^2$. Stopa kojom se protočno područje aorte smanjuje iznosi

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= \frac{dA}{dh}\cdot\frac{dh}{dt}\\ &= -2\pi(1-h)\left(-\frac{1}{2}\cdot 0.01\frac{-2t}{\sqrt{10\,000-t^2}}\right)\\ &= -2\pi(1-h)\frac{0.01t}{\sqrt{10\,000-t^2}}\\ &= -\frac{0.02\pi t(1-h)}{\sqrt{10\,000-t^2}}.\end{aligned}$$

U trenutku kada je osoba stara 40 godina debljina naslaga na aorti iznosi

$$h = g(40) = 1 - 0.01\sqrt{10\,000-40^2} \approx 0.0835\,\text{cm}.$$

Stoga je $A'(40) = -0.008\pi \approx -0.025\,[\text{cm}^2/\text{god}]$ iz čega zaključujemo kako se kod osobe stare 40 godina područje koje nije zahvaćeno naslagama smanjuje brzinom od 0.025 cm^2 godišnje. ◀

2.4 Ekonomija

Neka je $C : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ funkcija troška, tj. neka $C(x)$ predstavlja trošak tvrtke za proizvodnju x jedinica nekog proizvoda. Iako je funkcija C definirana samo na skupu prirodnih brojeva, kako bismo mogli koristiti derivaciju, smatrat ćemo da je varijabla x nenegativan realan broj. *Marginalni trošak* predstavlja mjeru promjene funkcije troška

$$C'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{C(x+\Delta x)-C(x)}{\Delta x}. \tag{3}$$

Ukoliko u izraz (3) uvrstimo $\Delta x = 1$, za dovoljno velike x dobivamo izraz

$$C'(x) \approx C(x+1) - C(x).$$

Stoga marginalni trošak mjeri koliko bi tvrtka trebala uložiti kako bi proizvodnju povećali s x proizvoda na $x+1$ proizvod. Funkcija troška najčešće se modelira polinomom trećeg stupnja oblika

$$C(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

gdje konstanta a predstavlja cijenu režija i održavanja, b cijenu materijala, dok konstante c i d predstavljaju cijenu rada.

Neka $R(x)$ predstavlja prihod koji tvrtka ostvaruje od prodaje x jedinica određene robe. Ukoliko tvrtka naplaćuje p kuna po jedinici tada je funkcija prihoda dana izrazom $R(x) = px$. Prodajna cijena p jedinice proizvoda vezana je uz potražnju za količinom od x jedinica toga proizvoda, što nazivamo *količinom potražnje*, a njihov međusobni odnos naziva se *jednadžba potražnje*. Rješavanjem jednadžbe potražnje za p u ovisnosti o x dobiva se funkcija cijene jedinice proizvoda te stoga funkcija R poprima oblik $R(x) = xf(x)$. Marginalni prihod daje aktualan prihod ostvaren od prodaje dodatne jedinice proizvoda pod uvjetom da je prodaja već na određenom stupnju. Stoga R' mjeri stopu promjene funkcije prihoda.

Ukoliko tvrtku zanima koliki je njezin profit, odnosno zarada, tada ona promatra *funkciju profita P* koja je dana izrazom

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

pri čemu su gore navedene funkcije R i C funkcija prihoda odnosno funkcija troška. Jednostavno rečeno, tvrtka računa kolika je njena „čista" zarada nakon što se od prihoda odbije iznos koji je potreban za proizvodnju proizvoda. Tada $P'(x)$ mjeri stopu trenutačne zarade ($P'(x) > 0$) ili gubitka ($P'(x) < 0$) koji je ostvaren prodajom $(x+1)$-ve jedinice proizvoda uz pretpostavku da je već prodano x jedinica toga proizvoda.

Na sljedećem primjeru pogledajmo primjenu funkcije troška, prihoda i zarade.

Zadatak 5. Tjedna potražnja za LED televizorima iznosi

$$p = 6000 - 0.05x \qquad (0 \leq x \leq 120\,000)$$

gdje p predstavlja jediničnu cijenu LED televizora u kunama, a x količinu potražnje. Funkcija troška za proizvodnju LED televizora dana je izrazom

$$C(x) = 80\,000 + 400x - 0.03x^2 + 0.000002x^3.$$

1. Odredite $C'(2000)$ i objasnite značenje dobivenog broja. Što taj broj predstavlja? Usporedite predviđeni i stvarni trošak proizvodnje dvije tisuće prvog proizvoda.

2. Pronađite funkciju profita, odredite $P'(2000)$ te objasnite značenje dobivenog broja.

Rješenje. 1. Marginalni trošak je oblika $C'(x) = 400 - 0.06x + 0.000006x^2$. Stoga je $C'(2000) = 304$ kn po jedinici proizvoda. Dobiveni broj predstavlja trošak proizvodnje 2001. LED televizora. Dok stvarni trošak proizvodnje 2001. LED televizora iznosi $C(2001) - C(2000) = 303.982$ kn . Iz dobivenih rezultata možemo zaključiti da je predviđeni trošak proizvodnje vrlo precizan.

2. Kako bismo odredili funkciju profita, najprije je potrebno odrediti funkciju prihoda

$$R(x) = xp = 6000x - 0.05x^2.$$

Stoga je funkcija profita dana izrazom

$$\begin{aligned} P(x) =& R(x) - C(x) \\ =& -80\,000 + 5600x - 0.02x^2 - 0.000002x^3. \end{aligned}$$

Stopa profita je stoga

$$P'(x) = 5600 - 0.04x - 0.000006x^2$$

iz čega slijedi $P'(2000) = 5496$ pa je prodajom 2001. LED televizora ostvaren profit od 5496 kn. ◀

Promotrimo još jednu važnu primjenu derivacije u ekonomiji poznatu pod nazivom *neprekidno ukamaćivanje*. Označimo li s C iznos novca koji želimo uložiti u nekom trenutku tada taj iznos nazivamo *glavnica* (ili *kapital*). Po isteku danog roka posuđena glavnica donijet će kamatu I, čiji iznos ovisi o kamatnoj stopi p, o vremenu posuđivanja te o načinu obračuna.

Nakon n godina glavnica C uz godišnju kamatnu stopu p porast će na iznos

$$C_n = C\Big(1 + \frac{p}{100}\Big)^n.$$

No, često se obračun kamata izvršava u kraćim vremenskim intervalima (polugodišnji, kvartalni, mjesečni, dnevni obračun kamata). Ukoliko se ukamaćivanje obavlja m puta godišnje, tada je iznos glavnice na kraju n-te godine:

$$C_n = C\Big(1 + \frac{p}{100m}\Big)^{mn}.$$

Promotrimo što se događa kada se ulog C ukamaćuje svakog trenutka

$$\begin{aligned} C_n &= \lim_{m\to\infty} C\Big(1 + \frac{p}{100m}\Big)^{mn} \\ &= \lim_{m\to\infty} C\Big(1 + \frac{1}{\frac{100m}{p}}\Big)^{\frac{100m}{p}\cdot\frac{np}{100}} \\ &= Ce^{\lim_{m\to\infty}\frac{np}{100}} \\ &= Ce^{\frac{np}{100}}. \end{aligned} \tag{4}$$

Derivacija izraza (4) je oblika

$$C_n' = \frac{p}{100} C e^{\frac{np}{100}} = \frac{p}{100} C_n$$

iz čega zaključujemo kako je brzina rasta glavnice u trenutku n proporcionalna iznosu glavnice u tom trenutku.

2.5 Brzina u drugim znanostima

Mnoge su primjene brzine (tj. mjere promjene neke veličine) u znanostima. Tako se u sociologiji brzina koristi u analizi širenja glasina ili novosti, u medicini pri proučavanju brzine utjecaja lijekova na pacijente, u psihologiji psiholozi proučavaju stopu poboljšanja učenja tijekom određenog vremenskog perioda, dok meteorologe zanima stopa promjene atmosferskog tlaka s promjenom nadmorske visine. Pored toga, u arhitekturi i urbanizmu brzina se koristi za proučavanje stope promjene gustoće populacije u ovisnosti o udaljenosti od centra grada dok geolozi proučavaju brzinu hlađenja lave.

Svi navedeni primjeri pokazuju kako je upotreba derivacije rasprostranjena u svim područjima znanosti te da je otkriće derivacije uvelike pomoglo znanstvenicima u proučavanju raznih pojava u svakodnevnom životu.

Literatura

[1] B. Apsen, *Riješeni zadaci iz više matematike uz prvi dio repetitorija*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1970.

[2] D. Jukić, *Matematički modeli*, Nastavni materijali, Odjel za matematiku Sveučilišta u Osijeku, `http://www.mathos.unios.hr/modeli/materijali.html`, 2010.

[3] D. Nöthing Hus, M. Herak, *Opća kemija 2*, Školska knjiga, Zagreb, 2003.

[4] J. Planinić, *Osnove fizike 1 - mehanika*, Školska knjiga, Zagreb, 2005.

[5] J. Stewart, *Calculus 7th Edition*, McMaster University and University of Toronto, Brooks/Cole, Cengage Learning, Belmont, 2008.

[6] S. T. Tan, *Applied Calculus for the Managerial, Life, and Social Sciences: A Brief Approach, Eight Edition*, Brooks/Cole, Cengage Learning, Belmont, 2009.