Alija Muminagić, Данска
Jens Carstensen, Данска

ТРИ РЕШЕНИЈА НА ЕДНА ПОЗНАТА ЗАДАЧА

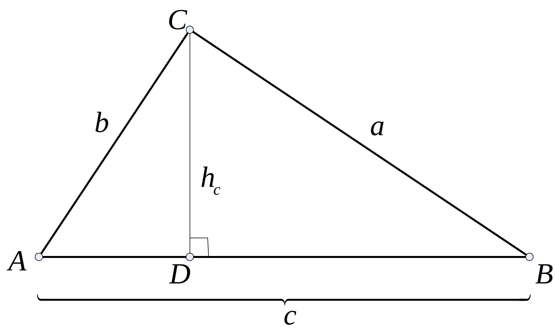
Во овој мал прилог ќе дадеме три од повеќето различни решенија на следнава позната задача:

Докажете дека во правоаголниот триаголник ABC ($\measuredangle C = 90^\circ$) важи:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h_c^2}, \tag{1}$$

каде што a и b се должини на катетите и h_c е должина на висината повлечена кон хипотенузата c.

Решение 1. Во ова решение ќе ја примениме Евклидовата теорема:



Висината h_c повлечена кон хипотенузата c во правоаголен триаголник ABC е еднаква на геометриската средина на отсечоците c_1 и c_2 што на хипотенузата ги одредува подножјето на висината, т.е. ако $\overline{AD} = c_1$ и $\overline{DB} = c_2$ (цртеж десно), тогаш

$$h_c = \sqrt{c_1 c_2} \;\Leftrightarrow\; h_c^2 = c_1 c_2. \tag{2}$$

Од (2), ако ја искористиме Питагоровата теорема добиваме:

$$a^2 = h_c^2 + c_2^2 = c_1c_2 + c_2^2 = c_2(c_1 + c_2) = cc_2,$$

$$b^2 = h_c^2 + c_1^2 = c_1c_2 + c_1^2 = c_1(c_1 + c_2) = cc_1.$$

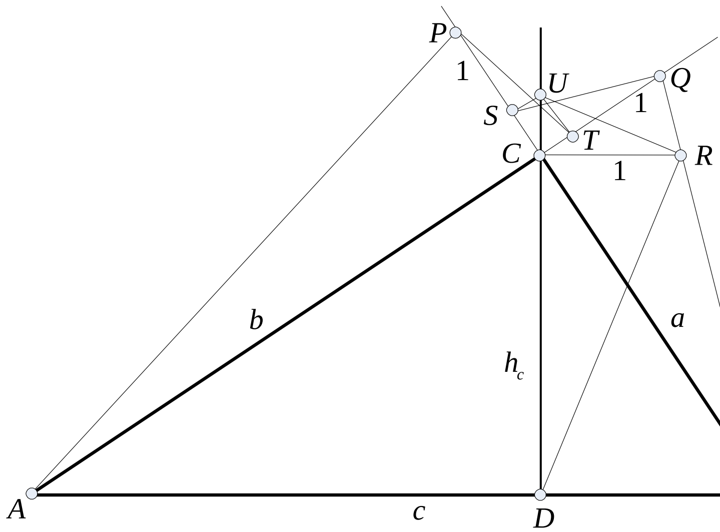
Според тоа

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{cc_2} + \frac{1}{cc_1} = \frac{c_1+c_2}{cc_1c_2} = \frac{c}{cc_1c_2} = \frac{1}{c_1c_2} = \frac{1}{h_c^2}. \;\blacksquare$$

Решение 2. Од формулите за плоштина на правоаголен триаголник и од Питагоровата теорема следува:

$$\frac{1}{h_c^2} = \frac{\frac{1}{h_c^2}\cdot 4P^2}{4P^2} = \frac{\frac{1}{h_c^2}\cdot 4(\frac{1}{2}ch_c)^2}{4(\frac{1}{2}ab)^2} = \frac{\frac{1}{h_c^2}\cdot c^2h_c^2}{a^2b^2} = \frac{c^2}{a^2b^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}. \;\blacksquare$$

Решение 3. Во правоаголниот триаголник ABC ($\measuredangle C = 90^\circ$) имаме $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{CD} = h_c$. На продолжението на катетата BC преку точката C конструираме точка P, така што $\overline{CP} = 1$. Ги поврзуваме точките A и P и во точката P конструираме нормала на AP. Пресечната



точка на таа нормала и продолжението на катетата AC, преку точката C ја означуваме со T (цртеж горе). Триаголникот ATP ($\measuredangle P = 90^\circ$) е правоаголен, и според Евклидовата теорема добиваме дека

$$\overline{CT} = \tfrac{1}{b}. \qquad (3)$$

На ист начин конструираме на продолжението на катетата AC, преку точката C, точка Q, така што $\overline{CQ} = 1$. Нормалата на BQ, конструирана во точката Q го сече продолжението на катетата BC, преку точката C, во точка S. Сега во правоаголниот триаголник BQS ($\measuredangle Q = 90^\circ$) е исполнета Евклидовата теорема, па според тоа

$$\overline{CS} = \tfrac{1}{a}. \qquad (4)$$

Конструираме во точката C нормала на висината $h_c = CD$ и на таа нормала определуваме точка R, така што $\overline{CR} = 1$. Во точката R конструираме нормала на DR и пресечната точка на таа нормала и прдолжението на висината h_c (преку точката C) го означуваме со U. Во правоаголниот триаголник RU ($\measuredangle R = 90^\circ$) е исполнето:

$$\overline{CU} = \frac{1}{h_c}\,. \qquad (5)$$

Ќе ја спојме точката U со точките S и T. Во триаголниците USC и DCB е исполнето:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{UC}} \overset{(5)}{=} \frac{a}{\frac{1}{h_c}} = ah_c\,, \qquad (6)$$

и

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{SC}} \overset{(4)}{=} \frac{h_c}{\frac{1}{a}} = ah_c\,, \qquad (7)$$

т.е.

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{UC}} \overset{(6),(7)}{=} \frac{\overline{CD}}{\overline{SC}}\,,$$

па според тоа $\triangle USC \sim \triangle DCB$ и од таа сличност следува дека $\measuredangle USC = 90^\circ$. Слично, од $\triangle UCT \sim \triangle ACD$ следува дека $\measuredangle UTC = 90^\circ$, што повлекува дека четириаголникот $SCTU$ е правоаголник, па според тоа

$$SC = CT \overset{(3)}{=} \frac{1}{b}\,. \qquad (8)$$

Конечно, со примена на Питагорината теорема на триаголникот USC добиваме дека

$$CS^2 + SU^2 = CU^2 \quad \overset{(4),(8),(5)}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h_c^2}\,. \blacksquare$$

На крајот од ова наше дружење презентираме гтри цртежи сочија помош може да се докаже Евклидовата теорема. На читателот му оставаме за вежба врз основа на овие цртежи да го испише доказот на оваа теорема.