

ММО 2013

1. Во множеството прости броеви реши ја равенката $p^{2q} + q^{2p} = r$.

Решение. Јасно, $r > 2$, па затоа r е непарен прост број. Според тоа, еден од броевите p или q е еднаков на 2, а другиот е непарен број. Без губење на општоста можеме да земеме дека $q = 2$ и $p = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.
Значи, за дадена равенка последователно добиваме

$$p^4 + 4 \cdot 2^{4k} = r,$$

$$p^4 + 4 \cdot 2^{4k} + 4 \cdot 2^{4k} p^2 - 4 \cdot 2^{2k} p^2 = r,$$

$$(p^2 + 2 \cdot 2^{2k})^2 - (2 \cdot 2^k p)^2 = r,$$

$$(p^2 + 2 \cdot 2^{2k} + 2 \cdot 2^k p)(p^2 + 2 \cdot 2^{2k} - 2 \cdot 2^k p) = r,$$

$$(p^2 + 2 \cdot 2^{2k} + 2 \cdot 2^k p)((p - 2^k)^2 + 2^{2k}) = r.$$

Во последното равенство важи

$$p^2 + 2 \cdot 2^{2k} + 2 \cdot 2^k p > 1, (p - 2^k)^2 + 2^{2k} > 1,$$

па затоа левата страна е сложен број, што противречи на тоа дека r е прост број. Според тоа, дадената равенка нема решение о множеството прости броеви.

2. Вкупно 2^n монети се распоредени на неколку деца. Ако при распределбата на монетите некое од децата има барем половина од монетите, тогаш тоа дете на секое од преостанатите деца му дава онолку монети колку што детето веќе има. Во случај кога сите монети се кај едно дете нема прераспределба на монетите, а ако две деца имаат по половина од монетите, тогаш едното од нив му ги дава сите монети на другото. Определи го најголемиот можен број последователни прераспределби на монетите. (На пример, ако 32 монети на 6 деца првично се распоредени: 17, 2, 9, 1, 2, 1, тогаш по првата прераспределба децата ќе имаат 2, 4, 18, 2, 4, 2 монети, а по втората прераспределба децата ќе имаат 4, 8, 4, 4, 8, 4 монети, па значи имаме само две прераспределби.)

Решение. Прво ќе дадеме пример кога имаме n последователни прераспределби. Нека дадените 2^n монети се распоредени кај 3 деца и тоа

$$1, 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2, 1.$$

Последователните n прераспределби ќе бидат:

$$2^1, 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2^2, 2^1$$

$$2^2, 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2^3, 2^2$$

.....

$$2^{n-2}, 2^{n-1}, 2^{n-2}$$

$$2^{n-1}, 0, 2^{n-1}$$

$$0, 0, 2^n.$$

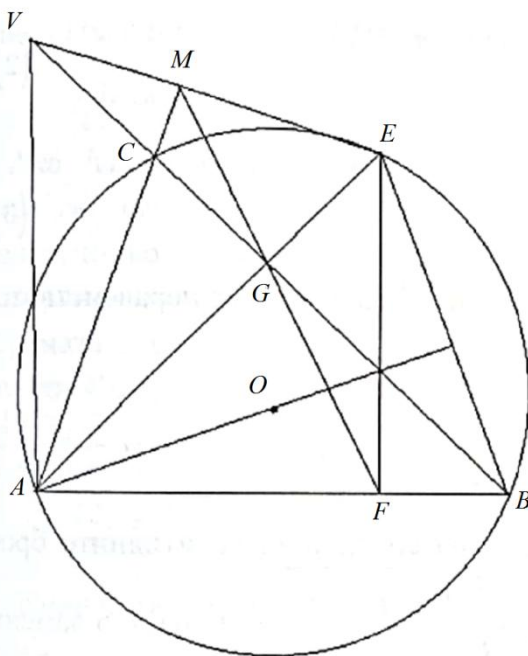
Нека претпоставиме дека постои почетна распределба за која се можни барем $n+1$ прераспределби. Јасно, по секоја прераспределба бројот на монетите кај секое дете е парен број. Имено, кај децата кои добиваат монети бројот се удвојува, а кај детето кое дава монети бројот на монетите е разлика на бројот 2^n и збир на парни броеви, па значи е парен број. Тоа значи дека по k -тата прераспределба бројот на монетите кај секое дете е делив со 2^k . Значи, по $n+1$ прераспределба бројот на монетите кај секое дете е делив со 2^{n+1} , што не е можно бидејќи постои дете кое има ненулта број монети и тој број е помал или еднаков на 2^n .

3. Даден е остроаголен триаголник ABC таков што аголот во темето C е најголем. Нека E и G се соодветно пресечните точки на висината повлечена од темето A со опишаната кружница околу триаголникот ABC и страната BC и нека центарот O на опишаната кружница околу триаголникот ABC лежи на нормалата повлечена од темето A на правата BE . Нека точките M и F се подножјата на нормалите повлечени од точката E кон правите AC и AB , соодветно. Докажи дека

$$P_{MFE} < P_{FBEG}.$$

Решение. Нека V е пресекот на EM со BC (пресекот постои бидејќи аголот кај темето C е остар). Од теоремата на Симсон следува дека точките M, G, F се колинеарни. Понатаму, $\angle EAC = \angle EBC$ (агли над ист лак) и $\angle CAE = \angle BAO$. Понатаму, четириаголникот $FBEG$ е тетивен, па затоа $\angle GBE = \angle GFE$. Уште важи $\angle GAO = \angle GBE$ (агли со нормални карци). Затоа $\angle CAE = \angle GAO = \angle BAO$.

Значи, AO е симетрала на аголот и висина во триаголникот ABE , па затоа овој триаголник е рамнокрак, што значи дека $GF \parallel BE$. Правите, AO, EF, BG се висини во триаголникот ABE , па затоа се сечат во една точка. Понатаму, четириаголникот $AGMV$ е тетивен, па затоа важи $\angle MVG = \angle GAM$. Уште добиваме $\angle MAV = \angle VGM = \angle FGB$. Значи, AM е висина и симетрала на агол во триаголникот EAV , па овој триаголник е рамнокрак и M е средина на отсечката EV . Уште важи $\triangle AVE \cong \triangle AEB$. Јасно, $\triangle EGV \cong \triangle EGB$ и бидејќи и двата се правоаголници имаме $P_{GEM} = \frac{1}{2} P_{GEB}$. Од друга страна $P_{GFE} = P_{GFB}$, од каде се добива бараното неравенство.



4. Нека x, y, z се позитивни реални броеви такви што $x^4 + y^4 + z^4 = 3$. Докажи дека

$$\frac{9}{x^2+y^4+z^6} + \frac{9}{x^4+y^6+z^2} + \frac{9}{x^6+y^2+z^4} \leq x^6 + y^6 + z^6 + 6. \quad (*)$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц применето на тројките (x, y^2, z^3) и (x^3, y^2, z) , добиваме

$$(x^4 + y^4 + z^4)^2 \leq (x^2 + y^4 + z^6)(x^6 + y^4 + z^2),$$

т.е.

$$\frac{1}{x^2+y^4+z^6} \leq \frac{x^6+y^4+z^2}{9}. \quad (1)$$

Аналогно се добиваат неравенствата

$$\frac{1}{x^4+y^6+z^2} \leq \frac{x^4+y^2+z^6}{9}. \quad (2)$$

$$\frac{1}{x^6+y^2+z^4} \leq \frac{x^2+y^6+z^4}{9}. \quad (3)$$

Ги собираме неравенствата (1), (2) и (3), а потоа со примена прво на неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина, а потоа на условот на задачата, добиваме

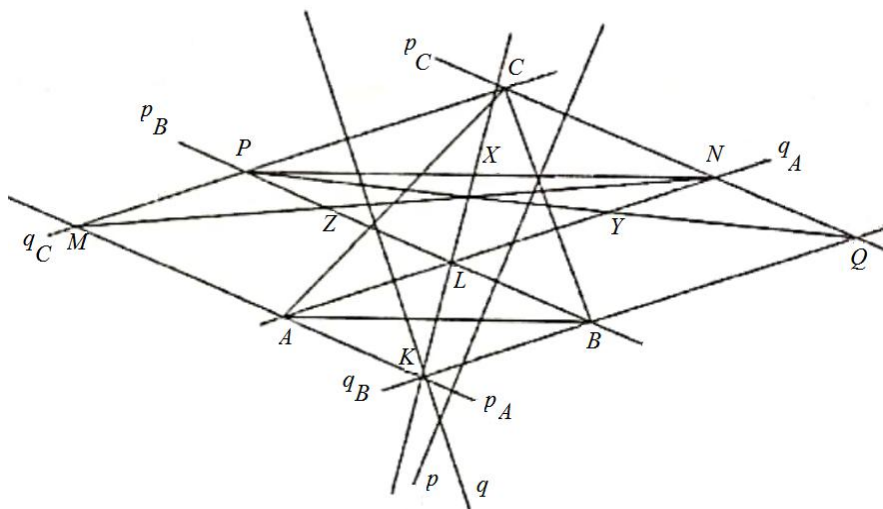
$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2+y^4+z^6} + \frac{1}{x^4+y^6+z^2} + \frac{1}{x^6+y^2+z^4} &\leq \frac{x^6+y^4+z^2}{9} + \frac{x^4+y^2+z^6}{9} + \frac{x^2+y^6+z^4}{9} \\ &\leq \frac{x^6+y^6+z^6+x^4+y^4+z^4+3\sqrt{\frac{x^4+y^4+z^4}{3}}}{9} \\ &= \frac{x^6+y^6+z^6+6}{9}, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. Во неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина знак за равенство важи ако и само ако $x^2 = y^2 = z^2$ и како броевите се позитивни добиваме $x = y = z$. Ако замениме во $x^4 + y^4 + z^4 = 3$, добиваме $x = y = z = 1$. Јасно, во овој случај знак за равенство важи и во неравенствата (1), (2) и (3), што значи дека во (*) важи знак за равенство.

5. Дадени се триаголник ABC и две прави p и q кои не се паралелни меѓу себе и не се нормални на ниту една од страните на триаголникот. Нормалите низ точките A, B, C на правата p да ги означиме со p_A, p_B, p_C , соодветно, а нормалите на правата q со q_A, q_B, q_C , соодветно. Нека пресечните точки на правите $p_A, q_A, p_B, q_B, p_C, q_C$ соодветно со правите $q_B, p_B, q_C, p_C, q_A, p_A$ се K, L, P, Q, N, M . Докажи дека правите KL, MN, PQ се сечат во една точка.

Решение. Без губење на општоста може да претпоставиме дека p_B е меѓу p_A и p_C . Прв случај, ако q_A е меѓу q_B и q_C , како на цртежот, тогаш KL ја сече PN . Аналогно, ако q_B е меѓу q_A и q_C , тогаш случајот е аналоген со претходниот. Втор случај, ако q_B е меѓу q_A и q_C , тогаш MQ и PN не се паралелни, па KL сече барем една од овие прави и двата случаја се еквивалентни. Значи, може да претпоставиме дека KL ја сече PN . Правата MN не може да е паралелна со p_B , бидејќи во тој случај p е нормална на AC и аналогно PQ не е паралелна со q_A .

Во натамошните разгледувања ќе работиме со должини со знак, т.е. за произволни точки E и F ќе сметаме дека $\overline{EF} = -\overline{FE}$.



Нека X, Y, Z се пресечните точки на правите PN, q_A, p_B соодветно со правите KL, PQ, MN . Од сличноста на триаголниците LNZ и PMZ следува

$$\frac{\overline{LZ}}{\overline{PZ}} = \frac{\overline{LN}}{\overline{PM}}. \quad (1)$$

Понатаму, од сличноста на триаголниците LPY и NQY следува

$$\frac{\overline{NY}}{\overline{LY}} = \frac{\overline{NQ}}{\overline{LP}}. \quad (2)$$

Ако KL не минува низ C , нека ги сече NC и MC соодветно во точките U и V . Сега, од триаголникот CPN и теоремата на Менелај за правата KL добиваме $\frac{\overline{PX}}{\overline{XN}} \frac{\overline{NU}}{\overline{UC}} \frac{\overline{CV}}{\overline{VP}} = -1$, т.е.

$$\frac{\overline{PX}}{\overline{NX}} = \frac{\overline{UC}}{\overline{NU}} \frac{\overline{VP}}{\overline{CV}}. \quad (3)$$

Од сличноста на триаголниците KQU и LNU добиваме $\frac{\overline{UQ}}{\overline{UN}} = \frac{\overline{KQ}}{\overline{LN}}$, па затоа $1 + \frac{\overline{NQ}}{\overline{UN}} = 1 + \frac{\overline{KB}}{\overline{LN}}$, па $\overline{UN} = \frac{\overline{LN} \cdot \overline{NQ}}{\overline{KB}}$ и $\overline{UC} = \overline{UN} + \overline{NC} = \frac{\overline{LN} \cdot \overline{NQ} + \overline{NC} \cdot \overline{KB}}{\overline{KB}}$ и оттука

$$\frac{\overline{NU}}{\overline{UC}} = \frac{\frac{\overline{LN} \cdot \overline{NQ}}{\overline{KB}}}{\frac{\overline{LN} \cdot \overline{NQ} + \overline{NC} \cdot \overline{KB}}{\overline{KB}}} = \frac{-\overline{LN} \cdot \overline{NQ}}{\overline{LN} \cdot \overline{NQ} + \overline{NC} \cdot \overline{KB}}. \quad (4)$$

Аналогно, од сличните триаголници KMV и LPV добиваме

$$\frac{\overline{CV}}{\overline{VP}} = \frac{\overline{LP} \cdot \overline{PM} + \overline{PC} \cdot \overline{KA}}{-\overline{LP} \cdot \overline{PM}}. \quad (5)$$

Ако ги замениме (4) и (5) во (3) добиваме

$$\frac{\overline{PX}}{\overline{NX}} = \frac{\overline{UC}}{\overline{NU}} \frac{\overline{VP}}{\overline{CV}} = \frac{\overline{LN} \cdot \overline{NQ} + \overline{NC} \cdot \overline{KB}}{-\overline{LN} \cdot \overline{NQ}} \frac{-\overline{LP} \cdot \overline{PM}}{\overline{LP} \cdot \overline{PM} + \overline{PC} \cdot \overline{KA}} = -\frac{\overline{LP} \cdot \overline{PM}}{\overline{LN} \cdot \overline{NQ}}. \quad (6)$$

Ако сега ги замениме (1), (2) и (6) во равенството на Чева за триаголникот LNP и правите LK, NM и PQ , добиваме

$$\frac{\overline{LZ}}{\overline{PZ}} \frac{\overline{PX}}{\overline{NX}} \frac{\overline{NY}}{\overline{LY}} = \frac{\overline{LN}}{\overline{PM}} \frac{\overline{NQ}}{\overline{LP}} \frac{-\overline{LP} \cdot \overline{PM}}{\overline{LN} \cdot \overline{NQ}} = -1.$$

Ако KL минува низ C , тогаш X е средина на PN и

$$\frac{\overline{LN}}{\overline{BK}} = \frac{\overline{NC}}{\overline{LB}}. \quad (7)$$

Ако сега ги замениме (1), (2) и (7) во равенството на Чева за триаголникот LNP и правите LK, NM и PQ , добиваме

$$\frac{\overline{LZ}}{\overline{PZ}} \frac{\overline{PX}}{\overline{NX}} \frac{\overline{NY}}{\overline{LY}} = -\frac{\overline{LN}}{\overline{PM}} \frac{\overline{NQ}}{\overline{LP}} = -\frac{\overline{NC}}{\overline{LB}} \frac{\overline{NQ}}{\overline{LP}} = -1.$$

Од обратната теорема на Чева следува дека правите LK, NM и PQ се сечат во една точка или се паралелни. Без губење на општоста можеме

да претпоставиме дека p_B е меѓу p_A и p_C . Ако q_B не е меѓу q_A и q_C , како на цртежот, тогаш очигледно е дека правите LK, NM и PQ не може да се паралелни. Ако q_B е меѓу q_A и q_C , тогаш за да правите LK, NM и PQ се паралелни треба да е $\frac{\overline{AK}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AL}}{\overline{AN}}$, но тогаш

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AL}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{KB}}{\overline{MC}},$$

па AB е паралелна со AC , што не е можно бидејќи ABC е триаголник.