ДИОФАНТОВА ЈЕДНАЧИНА $X^2 - DY^2 = 1$ У ДОДАТНОЈ НАСТАВИ

Милунка Обрадовић, Прокупље

Херонова формула изражава површину троугла помоћу његових страница

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \qquad s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Формула је названа по старогрчком инжењеру и научнику Херону који је живео и радио у Александрији у првом веку пре нове ере. Херон је разматрао троуглове са страницама: (a) $a = 13, b = 14, c = 15$; (б) $a = 5, b = 12, c = 13$ тј. странице и површине (80 и 34) су цели бројеви. Ови троуглови се називају Херонови.

Пример 1. У скупу троуглова чије су дужине страница узастопни природни бројеви, одредити оне чија је површина природан број.

Решење. Нека је $a = n-1$, $b = n$, $c = n+1$. Како је, по Хероновом обрасцу,

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad s = \frac{3n}{2}, \quad s-a = \frac{n}{2}+1, \quad s-b = \frac{n}{2}, \quad s-c = \frac{n}{2}-1$$

имамо

$$P = \sqrt{\frac{3n}{2}(\frac{n}{2}+1)\frac{n}{2}(\frac{n}{2}-1)}$$

$$P = \frac{n}{2}\sqrt{3((\frac{n}{2})^2-1)}.$$

Нека је $\frac{n}{2} = x$, $P = x\sqrt{3(x^2-1)}$. Из услова $P \in N$ следи да је $x^2 - 1 = 3y^2$. Решавајући задатак долазимо до једначине

$$x^2 - 3y^2 = 1 \quad \text{тј.} \quad x^2 - dy^2 = 1 \tag{1}$$

Њена целобројна решења су $\pm(x_n, y_n)$, где је

$$x_n : 1, 2, 7, 26, 97, \ldots$$
$$y_n : 0, 1, 4, 15, 56, \ldots$$

Како је $n = 2x$ ($x > 0$, $n > 2$) имамо да $n \in \{4, 14, 52, 194, \ldots\}$, па су дужине страница троугла:

$$(3,4,5); \quad (13,14,15); \quad (51,52,53); \quad (193,194,195)\ldots$$

Алгебарске једначине или системи алгебарских једначина са две или више непознатих са целим коефицијентима за које се траже целобројна решења су Диофантове једначине (системи). При томе је број непознатих увек већи од броја једначина.

Примери Диофантових једначина

1. $ax + by = 1$, где су a и b узајамно прости бројеви, има бесконачан скуп целобројних решења:

$$x = x_1 + bn, \qquad y = y_1 - an,$$

где је (x_1, y_1) било које решење, а n произвољан цео број.

2. $x^n + y^n = z^n$. За $n > 2$, то је велика Фермаова теорема. За $n = 2$, Диофантова једначина $x^2 + y^2 = z^2$ даје цела решења која се називају Питагорини бројеви, а правоугли троугао с целобројним катетама x, y и целобројном хипотенузом z се назива Питагорин троугао.

3. $x^2 - dy^2 = 1$ (Пелова једначина) има бесконачан скуп целобројних решења.

Решавање Пелове једначине

Диофантова једначина облика

$$x^2 - dy^2 = 1 \tag{2}$$

где је d природан број који није квадрат природног броја, у литератури је позната као Пелова једначина. Да једначина (2) има бесконачно много решења у скупу Z исказао је хипотезу Ферма 1657. године, а у потпуности доказао Лагранж. Доказ је елементаран. Са једначином (2) Пел није имао никакве везе, а грешка што се њему приписује припада Ојлеру (погрешан превод).

Добро је познато да се проблем решавања Пелове једначине своди на одређивање основног решења (x_1, y_1). Свако друго решење има облик $\pm(x_n, y_n)$, где је

$$x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n, \quad n \in N \cup \{0\}.$$

Пример 2. Решити једначину

$$x^2 - 2y^2 = 1 \tag{3}$$

Решење. Основно решење једначине (3) је (3,2).

$$\begin{aligned}
x_n + y_n\sqrt{2} &= (3 + 2\sqrt{2})^n, \quad n \in N \cup \{0\} \\
x_n - y_n\sqrt{2} &= (3 + 2\sqrt{2})^{-n} = ((3 + 2\sqrt{2})^{-1})^n = (3 - 2\sqrt{2})^n \\
2x_n &= (3 + 2\sqrt{2})^n + (3 - 2\sqrt{2})^n \\
2\sqrt{2}y_n &= (3 + 2\sqrt{2})^n - (3 - 2\sqrt{2})^n \\
x_n &= \frac{1}{2}((3 + 2\sqrt{2})^n + (3 - 2\sqrt{2})^n) \\
y_n &= \frac{1}{2\sqrt{2}}((3 + 2\sqrt{2})^n - (3 - 2\sqrt{2})^n).
\end{aligned}$$

Познато је да се при решавању једначине (2) користе диференцне једначине $x_1 + y_1\sqrt{d} = \alpha, \quad x_1 - y_1\sqrt{d} = \frac{1}{\alpha}$, па имамо:

$$x_1 = \frac{\alpha^2+1}{2\alpha}, \quad y_1 = \frac{\alpha^2-1}{2\sqrt{d}\alpha}$$

односно,

$$\alpha^2 - 2x_1\alpha + 1 = 0$$

и ово је карактеристична једначина диференцне једначине:

$$x_{n+2} - 2x_1x_{n+1} + x_n = 0$$

са почетним условима $x_0 = 1$, $x_1 = x_1$. Аналогно,

$$y_{n+2} - 2y_1y_{n+1} + y_n = 0$$

са почетним условима $y_0 = 1$, $y_1 = y_1$.

Сада за једначину (3) имамо решења $\pm(x_n, y_n)$, где је

$$\begin{aligned} x_n &: \quad 1, 3, 17, 99, \ldots \\ y_n &: \quad 0, 2, 12, 70, \ldots \end{aligned}$$

Напомена. Што се тиче основног решења, постоји Шуров резултат

$$1 < \frac{x_1 + y_1\sqrt{d}}{2} < d^{\sqrt{d}}.$$

Једначина

$$x^2 - (a^2-1)y^2 = 1, \quad a \in N \tag{4}$$

има за основно решење $(a, 1)$

Пример 3. Решити једначину $x^2 - 8y^2 = 1$.

Решење. Основно решење је $(3, 1)$. Сва решења су $\pm(x_n, y_n)$, где је

$$\begin{aligned} x_n &: 1, 3, 17, \ldots \\ y_n &: 0, 1, 6, \ldots \end{aligned}$$

Једначине $x^2 - dy^2 = 1$ и $x^2 - dy^2 = -1$

Нека је (u, v) основно решење једначине $x^2 - dy^2 = -1$. Познато је да је онда (A, B), где је

$$A + B\sqrt{d} = (u + v\sqrt{d})^2,$$

основно решење једначине $x^2 - dy^2 = 1$.

$$\begin{aligned} A + B\sqrt{d} &= u^2 + dv^2 + 2uv\sqrt{d} \\ A &= u^2 + dv^2 \\ B &= 2uv. \end{aligned}$$

Пошто је $u^2 - dv^2 = -1$ и $u^2 = dv^2 - 1$, за A можемо писати $A = 2dv^2 - 1$.

Пример 4. Решити једначину $x^2 - 13y^2 = 1$ ако се зна да је основно решење једначине $x^2 - 13y^2 = -1$ пар (18,5).

Решење. $A = 2 \cdot 13 \cdot 25 - 1 = 649$, $B = 2 \cdot 18 \cdot 5 = 180$.

Једначина $x^2 - (a^2 + 1)y^2 = 1$

Основно решење једначине $x^2 - (a^2 + 1)y^2 = -1$ је пар $(a, 1)$, а на основу претходних резултата основно решење једначине $x^2 - (a^2 + 1)y^2 = 1$ је пар $(2a^2 + 1, 2a)$.

Пример 5. Решити једначину $x^2 - 17y^2 = 1$.

Решење. Основно решење једначине $x^2 - 17y^2 = -1$ је пар $(4, 1)$, па је основно решење једначине $x^2 - 17y^2 = -1$ пар $(33, 8)$.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2001/02 година