Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија

УЗ ПОЧЕТАК 2015. ГОДИНЕ

Ратко Тошић, Нови Сад

Сваке године, на такмичењима се појављују задаци у којима фигурише редни број те године. За предлагаче задатака посебан је изазов да саставе задатак у коме су или неки услов, или само решење, повезани са редним бројем године. Вероватно ни ова година неће представљати изузетак, па зато задаци из овог чланка могу да послуже као својеврсна припрема за такмичења. Број 2015 је производ три проста броја:

$$2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31,$$

одакле следи да има 8 делилаца (укључујући 1 и 2015).

Задаци

1. У запису

$$7* + **7 + *49 = 2015$$

сваку звездицу замени неком цифром тако да збир буде тачан.

2. Ако је $AAA + AAB + ACC = 2015$, израчунај $A + B + C$. Различита слова представљају различите, а иста слова једнаке цифре.

3. Замени слова цифрама (различита слова различитим цифрама) тако да добијеш тачну једнакост:

$$4 \cdot ABC + D = 2015.$$

4. У запису

$$1{*}{*}{*} + {*}{*} + {*} = 2015$$

замени сваку звездицу неком цифром тако да добијеш тачну једнакост.

5. Дешифруј ребус

$$ABCD + ABC = 2015.$$

6. Са леве стране доње нетачне једнакости исписан је низ од десет деветки:

$$9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9 = 2015.$$

На неким местима између деветки уметни знаке рачунских операција, без коришћења заграда, тако да једнакост постане тачна.

7. У запису

$$9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1 = 2015$$

између сваке две суседне цифре са леве стране једнакости уметни знак неке рачунске операције и по потреби користи заграде тако да добијеш тачну једнакост.

8. Дешифруј сабирање

$$ABCD + EC = 2015.$$

Различита слова представљају различите цифре.

9. Замени сваку звездицу неком цифром тако да једнакост

$${*}{*}{*}{*} - {*}{*}{*} = 2015$$

буде тачна и да су и умањеник и умањилац палиндроми.

10. Замени сваку звездицу неком цифром тако да једнакост

$${*}{*}{*}{*} + {*}{*}{*} = 2015$$

буде тачна и да су сабирци палиндроми.

11. Премести два палидрвца тако да из

V + MXVI = MMXIV

добијеш тачну једнакост.

12. Које године је рођена нека особа ако је познато да ће она 2015. године напунити толико година колики је збир цифара године њеног рођења?

13. Одреди прву цифру најмањег броја са збиром цифара 2015.

14. Нађи најмањи број са збиром цифара 2015 који је дељив са 11.

15. Колико најмање пута треба узастопно исписати број 2015 да би се добио број дељив са 495?

16. Од 2015 коцки са ивицом дужине 1cm сложен је квадар чија је свака ивица дужа од 1cm. Одреди површину тог квадра.

17. Јоца има аутоматску машину која од комада картона правоугаоног облика зна да одсече квадрат чија је страница једнака мањој страници правоугаоника. Машина понавља ту радњу све док не изреже цео правоугаоник на квадрате. Када је Јоца ставио један правоугаоник у машину она је од њега направила 15 квадрата: два велика, 10 мањих и 3 најмања са страницом дужине 1. Одреди површину Јоциног правоугаоника.

18. Ове године (2015) Марков деда, који је рођен у 20. веку, напунио је толико година колики је производ цифара године његовог рођења. Које године је рођен Марков деда?

19. Да ли је могуће у свако поље табеле 2015×2015 уписати по један цео број тако да збир свих бројева буде позитиван, а збир бројева у сваком квадрату 3×3 буде 0?

20. Постоји ли број са збиром цифара 2015 који је потпун квадрат?

21. Први члан низа бројева је 2015, а сваки следећи једнак је збиру квадрата цифара претходног. Одреди 2015. члан тога низа.

22. Први члан низа је 2015, а сваки следећи се добија тако што се претходни сабере са његовом претпоследњом цифром. Одреди 2015. члан низа.

23. Прецртани су сви природни бројеви који су квадрати или кубови природних бројева. Који се од непрецртаних бројева налази на 2015. месту?

24. Да ли се број

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 2015^2$$

може представити у облику збира квадрата

а) 2014;

б) 2013

различитих природних бројева?

25. Постоје ли цели бројеви x, y, z такви да је

$$(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = 2015?$$

26. Квадар са целобројним дужинама ивица има запремину 2015. Обојен је споља црвено, а затим исечен на јединичне коцке. Ако је при томе добијено тачно осам коцкица са тачно три обојене стране, одреди број коцкица које немају ниједну обојену страну.

27. Марко има правоугаоник површине 2015. Он је од њега одсекао квадрат са страницом једнаком краћој страници правоугаоника. На преостали правоугаоник применио је исти поступак. На тај начин је после 14 сечења од правоугаоника добио квадрате. Одреди димензије полазног правоугаоника.

28. Посматрајмо растуће низове

4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, ...

7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, ...

10, 17, 24, 31, 38, 45, 52, ...

13, 22, 31, 40, 49, 58, 67, ...

....

Почетни чланови низова су редом 4, 7, 10, 13, ..., $3k+1$, ... а разлике суседних чланова су редом 3, 5, 7, 9, ...

Колико пута се укупно у тим низовима појављује број 2015?

Решења

1. $79 + 987 + 949 = 2015$.

2. За $A > 6$ збир бројева на левој страни је већи од 2100, а за $A < 6$ тај збир је мањи од 1800. Зато мора бити $A = 6$, па следи да је $666 + 66B + 6CC = 2015$, тј. $B + CC = 89$. Сада се лако види да је $C = 8$ и $B = 1$, одакле је $A + B + C = 15$.

3. $4 \cdot 502 + 7 = 2015$.

4. Решења су:

$$1997 + 9 + 9 = 2015; \quad 1998 + 9 + 8 = 2015; \quad 1998 + 8 + 9 = 2015;$$
$$1999 + 9 + 7 = 2015; \quad 1999 + 8 + 8 = 2015; \quad 1999 + 7 + 9 = 2015.$$

5. Дату једнакост можемо записати у облику $11 \cdot ABC + D = 2015$. Како је $2015 = 11 \cdot 183 + 2$, добијамо да је $ABC = 183$, па дата једнакост постаје

$$1832 + 183 = 2015.$$

6. $999 + 999 + 9 + 9 - 9 : 9 = 2015$.

7. $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot (6-5) \cdot 4 - (3-2) \cdot 1 = 2015$.

8. $1987 + 28 = 2015$; $1978 + 37 = 2015$; $1950 + 65 = 2015$; $1941 + 74 = 2015$; $1932 + 83 = 2015$.

9. Напишимо једнакост у облику

$$2015 + *** = ****.$$

Прва и последња цифра збира на десној страни су једнаке и могу бити само 2 или 3. Размотримо обе могућности.

Ако је

$$2015 + ABA = 2CC2,$$

онда је $A = 7$, па C мора бити 7 или 8. Провером налазимо да је $C = 7$, а онда B може бити само 5, тј. једно решење је

$$2772 - 757 = 2015.$$

Како $3003 - 2015 = 988$ није палиндром, других решења нема.

10. Лако се види да су прва и четврта цифра првог сабирка (четвороцифреног) јединице. Тада прва и трећа цифра другог сабирка (троцифреног) морају бити четворке. Дакле, после делимичне замене имамо: $1{*}{*}1 + 4{*}4 = 2015$. Друга цифра (према томе и трећа) у првом сабирку је 5 или 6. Другу могућност (цифра 6) елиминишемо због преноса из разреда десетица. Дакле, једино решење је $1551 + 464 = 2015$.

11. M + MXV = MMXV

12. Лако се види да је та особа рођена у 20. или 21. веку. У првом случају важи:

$$1900 + 10x + y + 1 + 9 + x + y = 2015,$$

тј. $11x + 2y = 105$. Цифра x је непарна, па провером лако налазимо да је $x = 9$, $y = 3$.
У другом случају налазимо да важи:

$$2000 + 10x + y + 2 + 0 + x + y = 2015,$$

тј. $11x + 2y = 13$, одакле лако налазимо да је $x = y = 1$.
Дакле, тражена година рођења је 1993. или 2011.

13. 8. $(2015 = 223 \cdot 9 + 8)$

14. 225-цифрен број 5399...99 (прва цифра 5, друга 3, остале цифре су деветке). Како је $2015 = 223 \cdot 9 + 8$, тражени број не може имати мање од 224 цифре. Међутим, 224-цифрен број са збиром цифара 2015 записује се са 223 цифре 9 и једном цифром 8 и не може бити дељив са 11. Да бисмо добили број дељив са 11, уместо цифре 8 на почетку написаћемо 53 и на тај начин добити број код кога се збир цифара на парним местима разликује од збира цифара на непарним местима за 11.

15. 99 пута.

16. Како је $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$, дужине ивица квадра су 5cm, 13cm и 31cm, па је његова површина једнака $2 \cdot (5 \cdot 13 + 5 \cdot 31 + 13 \cdot 31)\text{cm}^2 = 1246\text{cm}^2$.

17. Идући уназад закључујемо да су три најмања квадрата добијена од правоугаоника 3×1. Тај правоугаоник је остатак од претходног сечења 10 квадрата странице 3, тј. од правоугаоника 31×3. Овај правоугаоник је добијен тако што су одсечена два квадрата странице 31 од правугаоника 65×31, чија је површина $65 \cdot 31 = 2015$.

18. Претпоставимо да је тражена година рођења $\overline{19xy}$. Тада је

$$1900 + 10x + y + 1 \cdot 9 \cdot xy = 2015,$$

тј. $10x + y + 9xy = 115$, односно $10x + (9x + 1)y = 115$, где су x и y цифре. Јасно је да је x парна, а y непарна цифра, па провером налазимо два решења: 1925 и 1961. Дакле, Марков деда рођен је 1925. или 1961. године.

19. Да. Нумеришимо врсте и колоне бројевима од 1 до 2015. У пресеку врста и колона чији су редни бројеви дељиви са 3 уписати -8, у сва остала поља број 1.

20. Не. Број 2015 даје остатак 8 при дељењу са 9, а потпун квадрат при дељењу са 9 може имати као остатак 0, 1, 4 и 7.

21. Испишимо првих неколико чланова низа

$$2015, 30, 9, 81, 65, 61, 37, 58, 89, 145, 42, 20, 4, 16, 37, \ldots$$

После другог појављивања броја 37 јасно је да ће се периодично понављати бројеви

$$37, 58, 89, 145, 42, 20, 4, 16.$$

Како пре прве периоде имамо шест чланова низа и $2015 = 6 + 251 \cdot 8 + 1$, 2015. члан низа биће први број периоде, тј. 37.

22. 2103, јер је то први члан низа чија је претпоследња цифра 0.

23. Има 44 природна броја мања од 2015 који су квадрати и 12 који су кубови ($44^2 = 1936 < 2015 < 2025 = 45^2$, $12^3 = 1728 < 2015 < 2197 = 13^3$). Међу њима су три броја који су шести степени, тј. и квадрати и кубови: 1, 64 и 729. Дакле, међу бројевима од 1 до 2015 има $2015 - 44 - 12 + 3 = 1962$ бројева који нису ни квадрати ни кубови. Преостаје да видимо која су следећа 53 броја који нису ни квадрати ни кубови. Међу следећа 54 броја (од 2016 до 2069) само је број 2025 квадрат, а кубова нема. Дакле, 2015. број у траженом низу биће 2069.

24. а) Да. Заменити 1212^2 и 1616^2 са 2020^2, имајући у виду да је

$$1212^2 + 1616^2 = (3 \cdot 404)^2 + (4 \cdot 404)^2 = (5 \cdot 404)^2 = 2020^2.$$

б) У збиру добијеном под а) заменити још и 1215^2 и 1620^2 са 2025^2, имајући у виду да је

$$1215^2 + 1620^2 = (3 \cdot 405)^2 + (4 \cdot 405)^2 = (5 \cdot 405)^2 = 2025^2.$$

25. Не. После кубирања, скраћивања и груписања добијамо да је израз на левој страни дељив са 3, док број 2015 није дељив са 3.

26. Како постоји тачно осам коцкица са тачно три обојене стране, посматрани квадар има дужине ивица веће од 2, тј. дужине његових ивица су 5, 13 и 31. Тада је број коцкица које немају ниједну обојену страну једнак $3 \cdot 11 \cdot 29 = 957$.

27. 31×65. Могући правоугаоници површине 2015 са целобројним дужинама страница и површином 2015 су: 1×2015, 5×403; 13×155 и 31×65. Применом описаног поступка на последњи (31×65) после 14 сечења добијамо 15 квадрата (2 квадрата 31×31, 10 квадрата 3×3 и 3 квадрата 1×1). У свим другим случајевима потребан је већи број сечења.