Matematika i origami

Ljerka Jukić*

Sažetak.*Origami je japanska umjetnost savijanja papira u zanimljive modele, bez korištenja škara i ljepila. U ovom članku dajemo nekoliko primjera "origami geometrije".*

Ključne riječi: *origami*

Mathematics and origami

Abstract. *Origami is the art of folding pieces of paper into works of sculpture without aid of scissors or glue. In this paper there are a few examples of "origami geometry".*

Key words: *origami*

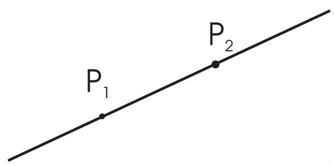
1. Origami

Origami je stara tradicionalna japanska umjetnost savijanja papira u razne modele, bez korištenja škara i ljepila. Papir koji savijamo može biti jednobojan ili dvobojan. Razlikujemo tradicionalni i modularni origami. U tradicionalnom origamiju konstrukcije se izvode korištenjem jednog lista papira koji ima oblik kvadrata ili pravokutnika. U modularnom origamiju različiti se individualni dijelovi povezuju u jednu cjelinu.
Origami ima svoju primjenu u matematici, ali i u drugim područjima kao elektrotehnika ili optika. Origami je također i izvor zabave. Mnogi ljudi uživaju u izrađivanju modela, a svoje ideje vole dijeliti s drugim ljubiteljima origamija. Postoje i brojne origami organizacije koje održavaju redovite konvencije svake godine, a na internetu se mogu naći brojne stranice s origami dijagramima i uputama za slaganje, različite aktivnosti vezane uz origami kao i radovi posvećeni origamiju sa znanstvene strane.
Origamijem se mogu izraditi tisuće raznih objekata, od zmajeva i ptica preko cvijeća do raznih matematičkih modela. Složeniji matematički modeli izrađuju se prije svega korištenjem modularnog origamija.

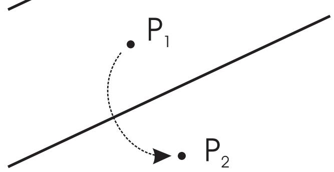
*Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Trg Ljudevita Gaja 6, HR-31000 Osijek, e-mail: ljukic@mathos.hr

1.1. Aksiomi origamija

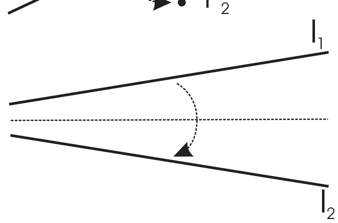
Već u nižim razredima osnovne škole učenici počinju izvoditi jednostavne geometrijske konstrukcije koristeći geometrijski pribor: ravnalo i šestar. Svaka geometrijska konstrukcija može se promatrati kao niz koraka, a svaki taj korak određen je geometrijskim pravilima (aksiomima).
Kao što postoje jasna pravila za geometrijske konstrukcije, tako postoje pravila kod origami konstrukcija. Taj skup od 7 pravila nazivamo *Huzita-Hatori askiomima*. Prvih šest aksioma formulirao je talijansko-japanski matematičar Humiaki Huzita 1992. godine, a sedmi je aksiom postavio Koshiro Hatori 2002. godine:



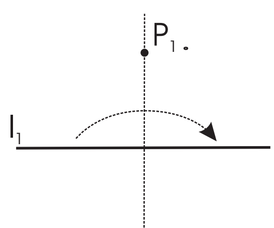
1. Za dvije dane točke P_1 i P_2, postoji linija savijanja koja prolazi kroz obje točke.



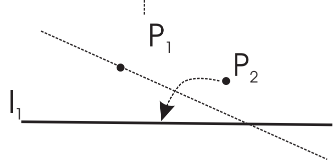
2. Za dvije dane točke P_1 i P_2, postoji linija savijanja koja smješta P_1 na P_2.



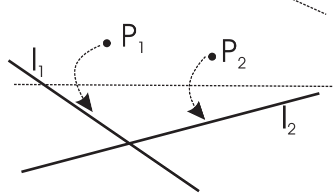
3. Za dva dana pravca l_1 i l_2, postoji linija savijanja koja smješta l_1 na l_2.



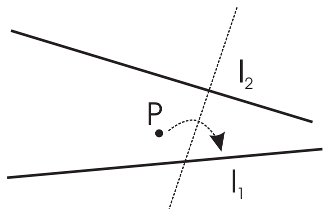
4. Za danu točku P_1 i pravac l_1, postoji linija savijanja okomita na pravac l_1, a prolazi kroz točku P_1.



5. Za dvije dane točke P_1 i P_2 i pravac l_1, postoji linija savijanja koja smješta točku P_2 na pravac l_1 i prolazi točkom P_1.



6. Za dvije dane točke P_1 i P_2 i dva dana pravca l_1 i l_2, postoji linija savijanja koja smješta točku P_1 na pravac l_1 i točku P_2 na pravac l_2.



Slika 1.1 *Aksiomi origamija*

7. Za danu točku P i dva pravca l_1 i l_2, postoji linija savijanja koja smješta točku P na pravac l_1, a okomita je na pravac l_2.

Robert Lang je dokazao potpunost ovih aksioma tj. pokazao je da nema drugih linija savijanja kojima možemo dobiti ravan pregib između danih točaka i pravaca.

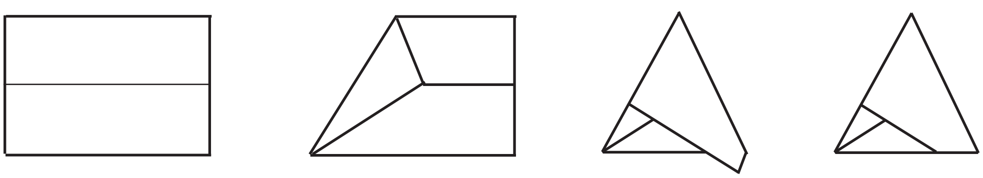
2. Origami konstrukcije

Pogledajmo nekoliko primjera:

2.1. Jednakostranični trokut

Koristeći origami možemo konstruirati pravilne mnogokute. Konstrukcija jednakostraničnog trokuta vrlo je jednostavna.

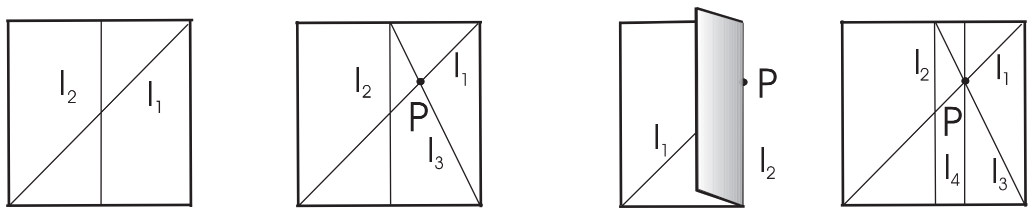
Počinjemo s papirom formata $A4$. Savijemo papir na pola po dužini, a zatim ga razmotamo. Savijemo gornji lijevi kut na liniju pregiba tako da nova linija savijanja prolazi donjim lijevim kutom. Nakon toga prema dolje savijemo gornji desni kut tako da rub papira leži duž pregiba. Dio koji viri na dnu presavijemo u unutrašnjost trokuta.



Slika 2.1. *Konstrukcija jednakostraničnog trokuta*

2.2. Dijeljenje kvadrata na trećine

Uzmimo papir kvadratnog oblika. Presavijmo kvadrat na pola, a zatim i po dijagonali. Pregib koji smo dobili savijanjem po dijagonali označimo s l_1. On dijeli kvadrat na dva jednakokračna trokuta. Pregib koji smo dobili presavijanjem kvadrata na pola označimo s l_2. Taj pregib dijeli kvadrat dva pravokutnika. Presavijmo po dijagonali jedan od ta dva pravokutnika, a dobiveni pregib označimo s l_3. Sjecište pregiba l_1 i l_3 označimo točkom P. Papir presavijmo tako da novi pregib prolazi točkom P, i da se rubovi papira poklapaju. Taj pregib označimo s l_4. Pregibom l_4 podijelili smo kvadrat na dva dijela: veći dio predstavlja dvije trećine, a manji dio jednu trećinu kvadrata.



Slika 2.2. *Dijeljenje kvadrata na trećine*

Dokažimo da smo zaista kvadrat pregibom l_4 podijelili na dvije trećine i jednu trećinu.

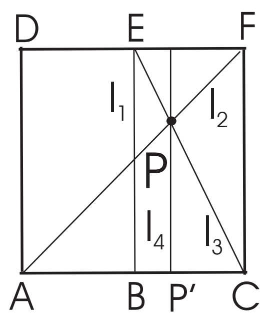
Neka su dane točke A, B, C, D, E, F, P' i P kao na slici 2.3. Trokut BCE je sličan trokutu $P'CP$. Trokut ACF je sličan trokutu APP'. Iz $\triangle BCE \sim \triangle P'CP$ slijedi

$$|PP'| = 2|P'C|, \tag{1}$$

a iz $\triangle ACF \sim \triangle APP'$

$$|PP'| = |AP'| \tag{2}$$

Iz relacija (1) i (2) zaključujemo: $|AP'| = \frac{2}{3}|AC|$ i $|P'C| = \frac{1}{3}|AC|$.

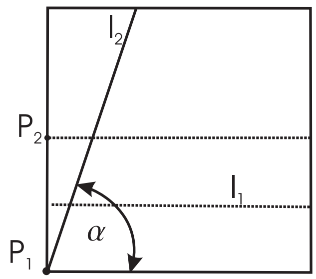


Slika 2.3. *Dokaz dijeljenja*

Duplikacija kocke, kvadratura kruga i trisekcija kuta poznati su geometrijski problemi koje su još stari Grci pokušavali riješiti koristeći samo ravnalo bez oznaka i šestar. Tek dvije tisuće godina kasnije dokazano je da se ti antički problemi ne mogu riješiti korištenjem šestara i ravnala. Zanimljivo je da se duplikacija kocke i trisekcija kuta mogu dobiti origami konstrukcijama.

2.3. Trisekcija kuta origami konstrukcijama

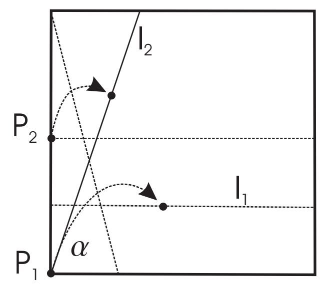
Rješenje izgleda ovako:



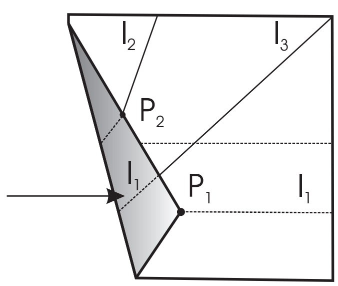
Slika 2.4. *Prvi korak*

Neka se kut koji želite podijeliti na tri jednaka dijela nalazi u donjem lijevom kutu papira s kojim radimo. Nazovimo taj kut α. (Ovdje pretpostavljamo da je kut α šiljasti kut, ali ova metoda može se jednostavno proširiti i na tupe kutove.) Napravite dva paralelna jednako udaljena pregiba na dnu. Donji pregib označimo s l_1, a drugi krak kuta kojeg dijelimo označimo s l_2. Točke P_1 i P_2 neka su dane kao na slici 2.4.

Pregibe u geometrijskom smislu promatramo kao pravce. Tako pregib l_1 možemo promatrati kao pravac l_1. Presavijte točku P_1 na pravac l_1 i točku P_2 na pravac l_2. Kako ovo nije nimalo lagano, morat ćete više puta pokušati prije nego nađete pravo mjesto za savijanje, no po aksiomu 6. postoji takva linija savijanja.



Slika 2.5. *Drugi korak*



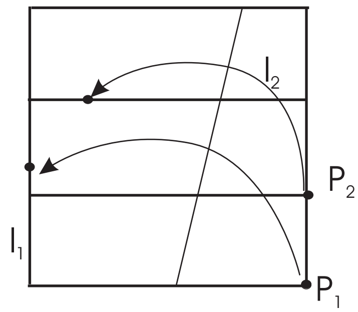
Slika 2.6. *Treći korak*

U ovom položaju papir ponovo presavijte duž pregiba l_1 kao na slici 2.6., a zatim ga razmotajte. Dobili smo novi pregib kojeg označimo s l_3. Proširite pregib l_3 do donjeg lijevog kuta.
Točka P_1 leži na pregibu l_3, a pregib l_3 dijeli kut α u omjeru $2:1$.

2.4. Duplikacija kocke origami konstrukcijama

Duplikacija dane kocke duljine brida y znači udvostručavanje volumena te kocke. Rješavanjem jednažbe $V_2 = 2V_1$ dobivamo da duljina brida nove kocke mora biti jednaka $x = y\sqrt[3]{2}$. Dakle, potrebno je konstruirati dužinu čija je duljina jednaka

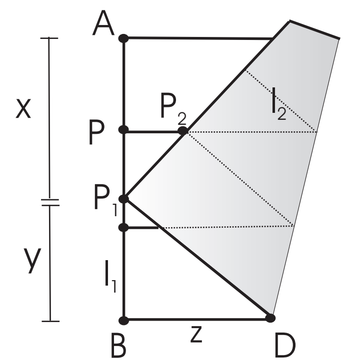
$\sqrt[3]{2}y$. Pogledajmo origami rješenje:



Slika 2.7. *Prvi korak*

Uzmimo papir kvadratnog oblika. Njega savijanjem podijelimo na trećine. Neka su P_1 i P_2 točke kao na slici, a l_1 i l_2 pravci kao na slici 2.7.

Točku P_1 savijanjem smjestimo na pravac l_1, a točku P_2 na pravac l_2. Točka P_1 dijeli stranicu kvadrata na dvije dužine duljina x i y. Omjer duljina tih dužina je upravo traženi broj $\frac{x}{y} = \sqrt[3]{2}$.



Slika 2.8. *Drugi korak*

Dokažimo da je to zaista $\sqrt[3]{2}$. Neka su uz točke P_1 i P_2, dane i točke A, B, D i P kao na slici 2.8. Zatim, neka je $|AB| = y + x$, $|AP_1| = x$ i $|P_1B| = y$ i neka je $|BD| = z$. Dobivamo $|BD| + |P_1D| = x + y$ i $|P_1D| = \sqrt{y^2 + z^2}$, a iz toga slijedi

$$z = \frac{x^2 + 2xy}{2(x + y)} \quad (1)$$

Iz slika 2.7. i 2.8. vidljivo je da je $|P_1P_2| = |AP| = \frac{1}{3}|AB| = \frac{(y+x)}{3}$ i $|P_1P| = |AB| - |P_1B| - |AP| = \frac{(2x-y)}{3}$. Trokut PP_1P_2 je sličan trokutu BDP_1, pa je stoga $\frac{|P_1D|}{|BD|} = \frac{|P_1P_2|}{|P_1P|}$ odnosno $\frac{(y+x)}{z} - 1 = \frac{y+x}{(2x-y)}$ ili

$$z = \frac{2x^2 + xy - y^2}{3x} \quad (2)$$

Iz (1) i (2) slijedi $4x^3 + 6x^2y - 2y^3 = 3x^3 + 6x^2y$. Stoga je $x^3 = 2y^3$, tj. $x = y\sqrt[3]{2}$.

3. Origami u nastavi matematike

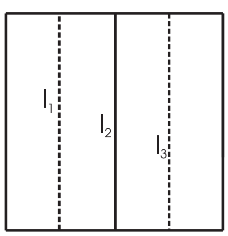
Vizualizacija u nastavi matematike ima veliku ulogu. Mnoge aksiome, teoreme i definicije lakše je razumjeti ako oni dobiju svoj vizualni prikaz. Origami možemo primijeniti u nastavi matematike za vizualizaciju određenih geometrijskih pojmova. Prednosti origamija su brojne. Izrađivanje origami modela prikladno je za rad u grupama jer se uz timski rad ostvaruje i socijalizacija. Učenici usvajaju nove matematičke pojmove i uočavaju nove odnose u prostoru ili ravnini. Za savijanje papira koriste vlastite ruke koje prate određen niz koraka i daju vidljive rezultate. Da bi rezultat bio uspješan, koraci se moraju provesti na točno opisan način. Tako se razvija spretnost i preciznost u radu.

Origamijem u matematici možemo prikazati trodimenzionalnu geometriju, centralnu i osnu simetriju, poligone, Platonova tijela i druge poliedre, paralelnost, okomitost, pravce koji se sijeku, presijecanje ravnina, sukladnost i sličnost, površine i volumene, kutove i simetrale kuta... Također možemo dokazati neke teoreme.

Materijal potreban za rad je jedan ili nekoliko listova papira. Nisu potrebne ni škare niti ljepilo. Ovakva vrsta materijala dostupna je u gotovo svim školama, stoga se vrlo lako može osmisliti zabavan, zanimljiv i poučan sat matematike koji će potaknuti interes učenika za daljnja, samostalna istraživanja.

Pogledajmo primjer modularnog origamija kojim na jednostavan način možemo izraditi kocku. Model kocke možemo koristiti za različite nastavne teme kao što su svojstva geometrijskih tijela ili geometrija prostora.

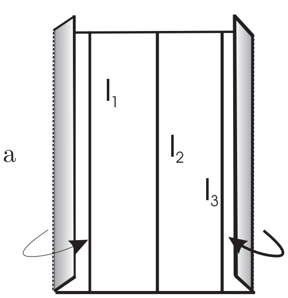
3.1. Origami kocka



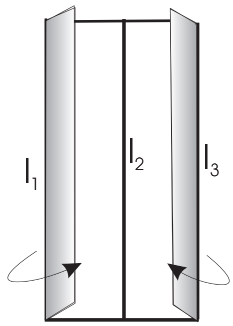
Slika 3.1. *Prvi korak*

Uzmimo papir kvadratnog oblika i njega savijanjem podijelimo na četvrtine. Dobivene pregibe označimo redom s l_1, l_2, i l_3.

Presavijmo lijevi rub papira do pregiba l_1, a desni do pregiba l_3.



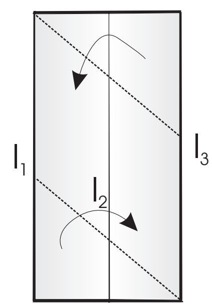
Slika 3.2. *Drugi korak*



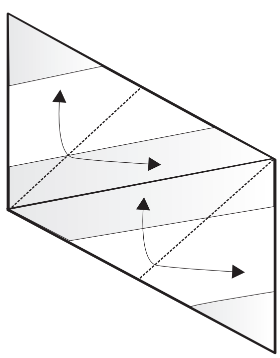
Slika 3.3. *Treći korak*

Sada prema unutra presavijmo lijevi rub papira duž pregiba l_1, a to isto ponovimo s desne strane; presavijmo desni rub papira prema unutra duž pregiba l_3.

Okrenimo papir na drugu stranu. Gornji desni kut savijmo do lijevog ruba papira, a donji lijevi kut savijmo do desnog ruba papira.



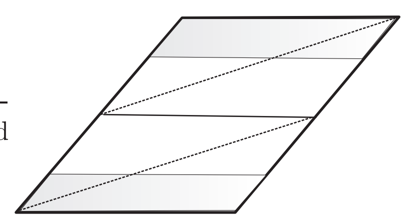
Slika 3.4. *Četvrti korak*



Slika 3.5. *Peti korak*

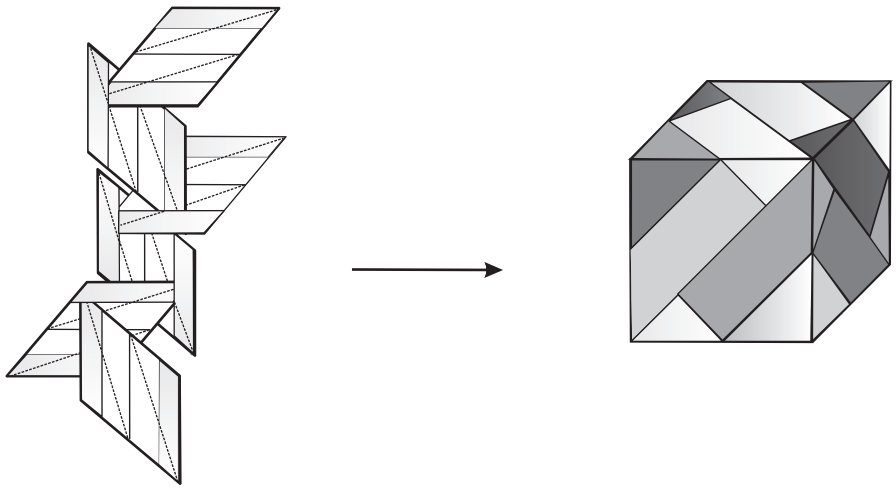
Sada gornji vrh presavijmo duž desnog ruba papira, a donji vrh duž lijevog ruba papira, a zatim ispravimo vrhove.

Okrenimo papir na drugu stranu i pogledajmo što smo dobili. Izradili smo modul od kojeg ćemo sastaviti kocku.



Slika 3.6. *Šesti korak*

Da bi mogli oblikovati kocku potrebno je izraditi šest ovakvih modula. Modul koji smo izradili ima oblik paralelograma čije dvije stranice imaju džepiće. U džepić svakog modula utaknimo vrh drugog modula i na taj način povežimo module u jednu cjelinu - kocku.



Slika 3.8. *Sedmi korak*

3.2. Origami u svijetu

Ova tradicionalna japanska umjetnost postaje sve popularnija. Svakim danom povećava se broj ljubitelja origamija u svijetu. Raste broj objavljenih knjiga, osnovanih organizacija i otvorenih stranica na internetu.
Popularnost i raširenost origamija pokazuju organizacije poput Origami Deutschland, Mouvement Franais des Plieurs de Papier, Israeli Origami Center, Centro Diffusione Origami (Italy), Japan Origami Academic Society, Origami USA, Asociacin Espanola de Papiroflexia, British Origami Society....

Na kraju predlažem da posjetite slijedeće stranice na internetu i uvjerite se u privlačnost origamija:
`www.fabricorigami.com`
`www.oriland.com`
`www.origami.com`
`www.origami.vancouver.bc.ca`
`www.paperfolding.com`
`www.langorigami.com`

Literatura

[1] Roger C.Alperin, *Trisections and totally real origami*, The American Mathematical Montly, 2005

[2] Roger C.Alperin, *Mathematical Theory of Origami Constructions and Numbers*, New York Journal of Mathematics, 2000.

[3] BARRY A.CIPRA *In Fold: Origami Meets Mathematics*, SIAM News, Volume 34, No. 8, 2001.

[4] THOMAS HULL, *Geometric Constructions via Origami*, Proceedings of the Second International Conference on Origami in Education and Therapy, V'Ann Cornelius, Origami USA, 1995

[5] ROBERT J.LANG, *Origami and Geometric Constructions*, `http://www.langorigami.com`

[6] `http://www.paperfolding.com/math`

[7] `http://mathworld.wolfram.com`