БМО 2019

1. Со $\mathbb{P}$ да го означиме множеството од сите прости броеви. Определи ги сите функции $f:\mathbb{P}\to\mathbb{P}$ такви што важи
$$f(p)^{f(q)}+q^p=f(q)^{f(p)}+p^q, \qquad (1)$$
за секои $p,q\in\mathbb{P}$.

Решение. Да претпоставиме дека $f(2)>2$. Тогаш (1) следува дека
$$f(p)^{f(2)}=f(2)^{f(p)}+p^2-2^p,$$
е парно за секој $p\in\mathbb{P}$, $p>2$, па мора да важи $f(p)=2$, за секој $p>2$. Последното не е можно бидејќи тогаш за $(p,q)=(3,5)$ од (1) следува $3^5=5^3$, што не е точно. Според тоа, $f(2)=2$ и сега за $q=2$ добиваме
$$f(p)^2+2^p=2^{f(p)}+p^2. \qquad (2)$$
Од (2) следува дека $f(p)\neq 2$ за $p>2$. Од друга страна, за секои природни броеви $x>y>2$ важи
$$2^x-x^2>2^y-y^2.$$
Последното неравенство се добива со индукција од неравенството
$$2^{y+1}-(y+1)^2-(2^y-y^2)=2^y-2y-1>0$$
за $y\geq 3$. Сега од (2) непосредно следува дека $f(p)=p$, за секој $p\in\mathbb{P}$. Јасно, оваа функција ја задоволува равенката (1).

2. Реалните броеви a,b,c се такви што $0\leq a\leq b\leq c$ и $a+b+c=ab+bc+ca>0$. Докажи дека
$$(a+1)\sqrt{bc}\geq 2.$$
Определи ги сите тројки (a,b,c) за кои важи знак на равенство.

Решение. *Прв начин.* Од условот на задачата следува
$$3(ab+bc+ca)\leq(a+b+c)^2=(ab+bc+ca)^2,$$
односно $ab+bc+ca\geq 3$. Понатаму, бидејќи $bc\geq ca\geq ab$, од последното неравенство следува $bc\geq 1$. Да означиме $\sqrt{bc}=x\geq 1$. Тогаш $b+c\geq 2\sqrt{bc}=2x$, па од условот на задачата следува
$$a=\frac{b+c-bc}{b+c-1}=1-\frac{bc-1}{b+c-1}\geq 1-\frac{x^2-1}{2x-1}=\frac{x(2-x)}{2x-1}, \qquad (1)$$
при што знач за равенство важи ако и само ако $b=c=x$.

1) Ако $\sqrt{bc}=x\geq 2$, тогаш очигледно
$$(a+1)\sqrt{bc}\geq 2(a+1)\geq 2.$$
Знак за равенство важи ако и само ако

$$a=0 \text{ и } b=c=x=2 \text{, т.е. } (a,b,c)=(0,2,2).$$

2) Ако $\sqrt{bc}=x<2$, тогаш од (1) следува

$$(a+1)\sqrt{bc}=ax+x\geq \tfrac{x^2}{2x-1}(2-x)+x\geq (2-x)+x=2,$$

бидејќи

$$\tfrac{x^2}{2x-1}=1+\tfrac{(x-1)^2}{2x-1}\geq 1.$$

Знак за равенство важи ако и само ако

$$b=c=x=1 \text{ и } a=\tfrac{x(2-x)}{2x-1}=1\text{, т.е. } (a,b,c)=1.$$

Втор начин. Да означиме $a+b+c=k$. Сега од

$$k=ab+bc+ca\geq a(a+b+c)=ka$$

следува $a\leq 1$. Имаме,

$$b+c=k-a \text{ и } bc=k-a(b+c)=k-a(k-a)=(1-a)k+a^2. \qquad (2)$$

Од неравенството меѓу средините имаме $(b+c)^2\geq 4bc$, па ако ги искористиме равенствата (2) имаме

$$k^2+(2a-4)k-3a^2\geq 0$$

и како $k>0$ добиваме

$$k\geq 2-a+2\sqrt{a^2-a+1}.$$

Оттука следува

$$\begin{aligned}(a+1)\sqrt{bc}&=(a+1)\sqrt{(1-a)k+a^2}\\ &\geq (a+1)\sqrt{(1-a)(2-a+2\sqrt{a^2-a+1})+a^2}\\ &=(a+1)(1-a+\sqrt{a^2-a+1})=F.\end{aligned}$$

Сега неравенството $F\geq 2$ е еквивалентен на неравенството

$$(a+1)\sqrt{a^2-a+1}\geq a^2+1,$$

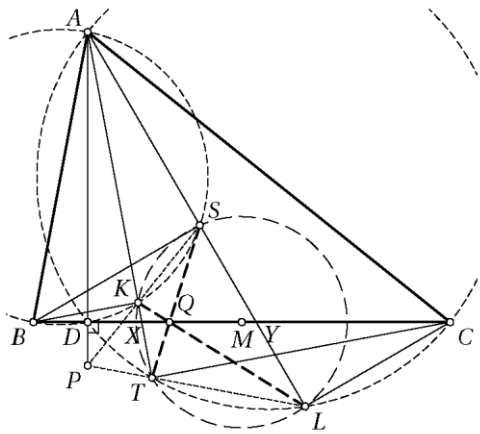
што со квадрирање се сведува на очигледното неравенство $a^3+a\geq 2a^2$. Знак за равенство важи ако и само ако $a=0$ или $a=1$, при услов $b=c$, односно ако и само ако $(a,b,c)=(0,2,2)$ или $(a,b,c)=(1,1,1)$.

3. Даден е остроаголен разностран триаголник ABC. Нека X и Y се различни внатрешни точки на отсечката BC такви што $\measuredangle CAX=\measuredangle YAB$. Да ги означиме со:
   1) K и S соодветно подножјата на нормалите повлечени од темето B на правите AX и AY,
   2) T и L соодветно подножјата на нормалите повлечени од темето C на правите AX и AY.

Докажи дека правите Kl и ST се сечат на правата BC.

Решение. *Прв начин*. Од условот на задачата следува $\triangle ABK \sim \triangle ACL$ и $\triangle ABS \sim \triangle ACT$, па затоа $\frac{\overline{AK}}{\overline{AL}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{AT}}$, односно $\overline{AK} \cdot \overline{AT} = \overline{AL} \cdot \overline{AS}$. Според тоа, точките K, L, S, T лежат на иста кружница k. Средината M на страната BC лежи на симетралите на отсечките KT и LS, па затоа таа е центар на кружницата k. Нека D е подножјето на висината повлечена од темето A. Кружницата k_1 со дијаметар AB минува низ точките D, K и S, а кружницата k_2 со дијаметар AC минува низ точките D, L и T.

Радикалните оски на паровите кружници $(k, k_1), (k, k_2)$ и (k_1, k_2) се соодветно правите KS, LT и AB и тие се сечат во радикалниот центар P на овие три кружници.



Сега, ако правите KL и ST се сечат во точката Q, од теоремата на Брокар за четириаголникот $KSLT$ следува дека правата AP е полара на точката Q во однос на кружницата k, па затоа $MQ \perp AP$, односно $MQ \parallel BC$, од каде што следува дека Q припаѓа на правата BC.

Втор начин. Нека правите KL и ST ја сечат правата BC во точките Q_1 и Q_2, соодветно. Од теоремата на Менелај следува

$$\frac{\overline{XQ_1}}{\overline{Q_1Y}} = \frac{\overline{XK}}{\overline{KA}} \cdot \frac{\overline{AL}}{\overline{LY}} \text{ и } \frac{\overline{XQ_2}}{\overline{Q_2Y}} = \frac{\overline{XT}}{\overline{TA}} \cdot \frac{\overline{AS}}{\overline{SY}},$$

па како или двете прави KL и ST ја сечат отсечката XY или ниту една од нив не ја сече отсечката XY доволно е да докажеме дека $\frac{\overline{XQ_1}}{\overline{Q_1Y}} = \frac{\overline{XQ_2}}{\overline{Q_2Y}}$, т.е.

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{AL}} \cdot \frac{\overline{AS}}{\overline{AT}} \cdot \frac{\overline{XT}}{\overline{XK}} \cdot \frac{\overline{YL}}{\overline{YS}} = 1. \tag{1}$$

Сега од сличностите $\triangle ABK \sim \triangle ACL, \triangle ABS \sim \triangle ACT, \triangle BXK \sim \triangle CXT, \triangle CYL \sim \triangle BYS$ следува

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{AL}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}, \frac{\overline{AS}}{\overline{AT}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}, \frac{\overline{XT}}{\overline{XK}} \cdot \frac{\overline{YL}}{\overline{YS}} = \frac{\overline{CT}}{\overline{BK}} \cdot \frac{\overline{CL}}{\overline{BS}} = \frac{\overline{CT}}{\overline{BS}} \cdot \frac{\overline{CL}}{\overline{BK}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}. \tag{2}$$

Ако ги помножиме равенствата (2) го добиваме равенството (1).

4. Решетка е множеството од сите точки од видот (m,n), каде m и n се цели броеви за кои важи $|m|\leq 2019, |n|\leq 2019$ и $|m|+|n|<4038$. Точките (m,n) од решетката за кои $|m|=2019$ или $|n|=2019$ ги нарекуваме *рабни*. Четирите прави $x=\pm 2019$ и $y=\pm 2019$ ги нарекуваме *рабови*. Две точки на решетката се соседни ако растојанието меѓу нив е еднакво на 1.
Зоран и Марко играат игра на решетката. Тие играат наизменично при што Зоран ја почнува играта со поставување на жетон на точката $(0,0)$, а Марко прв повлекува потез.
   1) Во секој свој потез Марко отстранува најмногу по две рабни точки од секој раб.
   2) Во секој свој потез Зоран прави точно три *чекори*. Чекорот се состои во поместување на жетонот на една од соседните точки кои не се отстранети.

   Играта завршува со победа на Зоран во моментот кога тој ќе го постави жетонот на некоја гранична точка која сè уште не е отстранета. Дали Зоран има победничка стратегија?

   Решение. *Прв начин*. Марко може да го оневозможи Зоран да победи. Стратегијата на Марко ќе ја опишеме на работ $y=2019$. На останатите рабови тој игра аналогно.
   Во првиот потез Марко ги отстранува точките $(-1,2019)$ и $(0,2019)$. Потоа:
   i) Ако Зоран со својот потез ја намали $x-$координатата, тогаш Марко ги отстранува првите две достапни точки лево од точката $(0,2019)$,
   ii) Ако Зоран не ја промени $x-$координатата, тогаш Марко ја отстранува првата достапна точка лево и првата достапна точка десно од точката $(0,2019)$.
   iii) Ако Зоран ја зголеми $x-$координатата, тогаш Марко ги отстранува првите две достапни точки десно од точката $(0,2019)$.
   iv) Единствено отстапување е кога Зоран прв пат ја намали $x-$координатата за точно 1, тогаш Марко ја отстранува првата достапна точка лево и првата достапна точка десно од $(0,2019)$.

   Да претпоставиме дека Зоран ќе победи со доаѓање до некоја точка $(a,2019)$. Можеме да сметаме дека $a>0$. Навистина, ако Зоран се движел по симетрична патека до точката $(-a,2019)$, тогаш Марко ќе стигнел да отстрани онолку точки лево од нулата колку што во овој случај отстранил десно од нулата.
   Ја разгледуваме големината
$$\Delta = 2x+y-3k,$$
каде (x,y) е моменталната позиција на жетонот, а k е најдесната отстранета точка. Имаме:

- Ако Зоран го помести жетонот за вектор $(-1,2),(0,3)$ или $(3,0)$, по неговиот и потезот на Марко Δ не се менува. Сепак, заради $iv)$, кога Зоран прв пат го поместува жетонот за вектор $(-1,2)$, по неговиот и потезот на Марко Δ се намалува за 1.
- Ако Зоран го помести жетонот за вектор $(2,1)$, по неговиот потез и потезот на Марко Δ се намалува за 1.
- Во секој друг случај Δ се намалува за најмалку 2.

По првиот потез на Марко важи $\Delta = 0$, па пред последниот потез на Зоран мора да биде $\Delta \leq 0$. Меѓутоа во тој момент е

$$\Delta = 2x + y - 3k \geq 2(a-2) + 2018 - 3(a-1) = 2017 - a \geq -1,$$

па е $a \leq 2018$ и Δ никогаш не се намалила за повеќе од 1. Оттука следува дека сите дотогашни потези на Зоран биле за вектор $(0,3)$ или $(3,0)$, освен можда еден за вектор $(2,1)$, па во тој момент

$$(x,y) \equiv (0,0)(\mathrm{mod}\, 3) \text{ или } (x,y) \equiv (2,1)(\mathrm{mod}\, 3).$$

Бидејќи Зоран има победа во најмногу три чекори, единствена можност е $(x,y) = (2018, 2017)$. Но, тогаш

$$\Delta = 2 \cdot 2018 + 2017 - 3k = 6053 - 3k > 0,$$

што е противречност.

Втор начин. Ќе дадеме друга стратегија на Марко на работ $y = 2019$. Достапните точки на овој раб ќе ги наречеме *излезни*.

Во првите 672 чекори, што и да игра Зоран, Марко ги затвора сите 1345 излези од видот $(x, 2019)$ за $3 \mid x$, а во 673 потез го затвора излезот кој е најблизок до Зоран (било кој, ако ги има два). Понатаму, по секој потез на Зоран, Марко затвора два излези кои се најблиски до Зоран (било кои ако ги има повеќе).

Со индукција по $n \geq 673$ ќе докажеме дека Зоран пред својот $n-$ти потез се наоѓа на растојание најмалку 4 (по координати) од најблискиот излез.

Нека $n = 673$. Зоран е или во точката $(0, 2016)$ или под правата $y = 2016$, а излезот $(0, 2019)$ Марко веќе го затворил, па затоа тврдењето важи.

Нека $n = 674$. Моменталната позиција на Зоран да ја означиме со (x_0, y_0). Ако $y_0 < 2018$, единствени три излези на растојание помало или еднакво на 3 од Зоран се $(x_0 \pm 1, 2019)$ и $(x_0, 2019)$, од кои едниот е веќе затворен, а Марко во својот $n-$ти потез ги затвора преостанатите два. Ако $y_0 = 2018$, тогаш $x_0 = \pm 1$ и без ограничување на општоста можеме да земеме дека $x_0 = 1$. Меѓу излезите $(a, 2019)$ за $-1 \leq a \leq 3$ три се веќе затворени, а Марко сега ги затвора преостанатите два.

Нека $n > 674$ и нека (x, y_1) е позицијата на Зоран по $n-2$ потези. Сите излези се на растојание поголемо или еднакво на 4 од Зоран. Од трите излези

$(x_1 \pm 1, 2019)$ и $(x_1, 2019)$ еден е веќе затворен, а Марко во $(n-1)-$от потез ги затвора преостанатите два (ако се отворени). Го разгледуваме $(n-1)-$от потез на Зоран.

i) Да претпоставиме дека Зоран свртува десно (случајот кога свртува лево е аналоген). Најблискиот излез лево од правата $x = x_1$ има x координата која не е поголема од $x_1 - 2$ и таа му е на растојание најмалку 4. Од друга страна, десно од правата $x = x_1$ на растојание помало или еднакво на 3 има најмногу два отворени излези, а Марко во својот $n-$ти потез ги затвора.

ii) Ако Зоран не ја менува $x-$координатата, тогаш Марко во својот $n-$ти потез ги затвора излезите $(x_1 \pm 2, 2019)$ (ако се отворени), па затоа најблискиот излез на Зоран ќе му биде на растојание поголемо или еднакво на 4.

Од претходните разгледувања следува дека Марко има стратегија со која Зоран не може да победи.