

Регионален натпревар 1985

I година

1. По натпреварот на кој учествувале Никола, Лазар, Весна и Соња, на прашањето каков бил редоследот одговориле:

Никола: „Весна е прва, а Лазар е втор“

Лазар: „Весна е втора, а Соња е трета“

Весна: „Соња е четврта, а Никола е втор“

Секој од нив дал по еден точен и еден неточен одговор. Каков бил редоследот?

Решение. Ако исказот на Лазар “Весна е втора” е точен, тогаш двата искази на Никола се неточни, што не е можно. Значи, Весна не е втора, а Соња е трета. Тогаш исказот на Весна “Никола е втор” е точен. Бидејќи Никола е втор, исказот на Никола “Весна е прва” е точен. Според тоа, редоследот бил следниот: Весна е прва, Никола е втор, Соња е трета и Лазар е четврт.

2. Да се најдат сите можности за запишување на бројот 1985 како збир од 1973 непарни природни броеви. Забелешка: Распоредот на броевите во збирот не е битен; на пример $3+1$ и $1+3$ е една можност.

Решение. Нека $1985 = a_1 + a_2 + \dots + a_{1973}$, каде што $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_{1973}$ се непарни природни броеви. Лесно се докажува дека $a_7 = a_8 = \dots = a_{1973}$. Според тоа бараните можности се всушност можности за запишување на бројот 18 како збир од 6 непарни природни броеви. Бидејќи $4 \cdot 5 = 20 > 18$ и $15 + 5 > 18$, се добива дека a_4, a_5, a_6 можат да бидат 1 или 3, а $3 \leq a_1 \leq 13$. Со комбинирање на броевите 1, 3, 5, 7, 9, 11 и 13 се добиваат бараните можности:

$$\begin{array}{lll} 3+3+3+3+3+3, & 5+3+3+3+3+1, & 5+5+3+3+1+1 \\ 5+5+5+1+1+1, & 7+3+3+3+1+1, & 7+5+3+1+1+1 \\ 7+7+1+1+1+1, & 9+3+3+1+1+1, & 9+5+1+1+1+1, \\ 11+3+1+1+1+1, & 13+1+1+1+1+1. & \end{array}$$

3. Даден е рамнокрак триаголник ABC во кој $\overline{AC} = \overline{BC}$ и висината спуштена од темето C е еднаква на половина од симетралата на аголот кај темето A . Најди го аголот кај темето C .

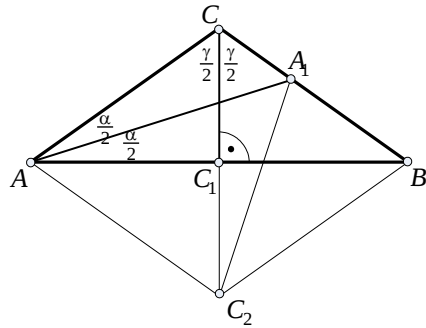
Решение. Нека CC_1 е висина спуштена од темето C и нека AA_1 е симетрала на аголот α кај темето A (види цртеж). Бидејќи триаголникот ABC е рамнокрак, точката C_1 е средина на страната AB и CC_1 е симетрала на аголот γ кај темето C . Нека C_2 е точка од правата CC_1 , така што $\overline{CC_1} = \overline{C_1C_2}$ (види цртеж). Од тоа што дијагоналите на четириаголникот AC_2BC се половат, следува дека тој четириаголник е паралелограм. Бидејќи $AC_2 \parallel CA_1$ и $\overline{AA_1} = \overline{CC_2}$, четириаголникот

AC_2A_1C е рамнокрак траpez, од што следува дека $\frac{\gamma}{2} = \angle C_2CA_1 = \angle CA_1A$. Од триаголниците AC_1C и AA_1C се добива $\gamma = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$ и $\frac{\gamma}{2} = 180^\circ - \gamma - \frac{\gamma}{2}$ соодветно.

Тогаш од равенството

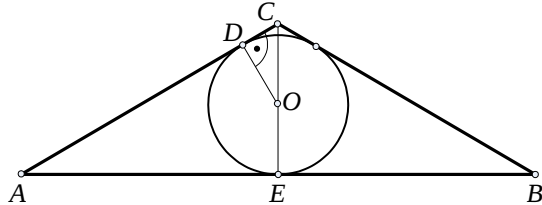
$$90^\circ - \frac{\gamma}{2} = 2(180^\circ - \gamma - \frac{\gamma}{2})$$

се добива дека $\gamma = 108^\circ$.



4. Во рамнокрак триаголник со агол 120° впишаната кружница има радиус 5 cm. Определи ги страните на триаголникот.

Решение. Нека O е центарот на впишаната кружница во дадениот триаголник ABC со агол 120° кај темето C . Нека D и E се допирните точки на кружницата со AC и AB соодветно (види цртеж). Во пра-



воаголниот триаголник ODC , $\angle DCO = 60^\circ$.

Од тоа следува дека $\overline{DO} = \overline{CO} \sin 60^\circ$, т.е. $\overline{CO} = \overline{DO} \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}}$. Според тоа,

$$\overline{CE} = \overline{CO} + \overline{OE} = \frac{10}{\sqrt{3}} + 5 = \frac{5(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}}.$$

Од триаголникот ACE следува дека $\overline{CE} = \overline{AC} \cos 60^\circ$, т.е. $\overline{AC} = \frac{10(\sqrt{3}+2)}{\sqrt{3}}$ cm.

Слично се добива дека $\overline{AE} = \overline{AC} \cos 60^\circ$, т.е. $\overline{AB} = 10(\sqrt{3}+2)$ cm.

II година

1. Нека a и b се корени на равенката $x^2 + px + 1 = 0$ и нека b и c се корени на равенката $x^2 + qx + 2 = 0$. Докажи дека $(b-a)(b-c) = pq - 6$.

Решение. Од Виетовите правила се добива дека $a+b = -p$, $ab = 1$, $b+c = -q$ и $bc = 2$. Тогаш:

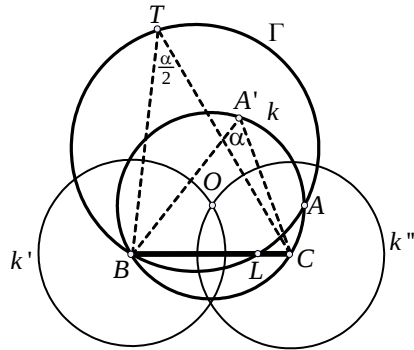
$$\begin{aligned} (b-a)(b-c) &= (b+a-2a)(b+c-2c) \\ &= (-p-2a)(-q-2c) \\ &= pq - 2aq - 2cp + 4ac \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= pq - 2a(b + c) - 2c(b + a) + 4ac \\
 &= pq - 2ab - 2bc - 2ac + 4ac = \\
 &= pq - 2ab - 2bc \\
 &= pq - 2 - 4 = pq - 6
 \end{aligned}$$

2. Да се конструира триаголник ABC со познати: страната BC , точката L на страната BC низ која минува симетралата на аголот кај темето A , и радиусот на опишаната кружница.

Решение. Анализа. Нека ABC е триаголник со радиус R на опишаната кружница и нека L е точка од BC така што AL е симетрала на аголот α кај темето A . Отсечките BC и BL се гледаат под агол α и $\frac{\alpha}{2}$ од A соодветно. Аголот α е определен со опишаната кружница и отсечката BC , како перифериски агол. Според тоа, A е пресечна точка на опишаната кружница со геометриското место на точки од кои отсечката BL се гледа под агол $\frac{\alpha}{2}$.

Конструкција. Ги цртаме отсечката BC и точката L . Цртаме кружници k' и k'' со радиус R и центри во B и C соодветно. Ако $R < \frac{1}{2}BC$, тогаш $k' \cap k'' = \emptyset$, па задачата нема решение. Нека $R \geq \frac{1}{2}BC$ и нека $O = k' \cap k''$. Конструираме кружница k со центар во O и радиус R . Нека A' е точка од k и нека $\alpha = \angle BA'C$. Го конструираме геометриското место Γ на точки од кои отсечката BL се гледа под агол $\frac{\alpha}{2}$. Γ е лак од кружница. Тогаш бараниот триаголник е ABC каде што A е пресечната точка на k и Γ различна од B (види цртеж).



Доказ. Следува од теоремата за перифериски агли, конструкцијата и анализата.

Дискусија. Веќе докажавме дека задачата нема решение ако $R < \frac{1}{2}BC$. Ако $R > \frac{1}{2}BC$ тогаш во зависност од изборот на лакот на кој лежи A' се добиваат две различни вредности на аголот α , па задачата има две решенија. Ако $R = \frac{1}{2}BC$, тогаш аголот α е еднозначно определен, па задачата има единствено решение.

3. Најди трицифрен број кој помножен со 7 дава куб од природен број.

Решение. Нека бараниот број е a . Од условот на задачата следува дека $7a = n^3$, $n \in \mathbb{N}$. Значи, 7 е делител на n^3 . Бидејќи 7 е прост број, следува дека 7

е делител на n . Нека $n = 7k$. Тогаш $a = 7^2 k^3 = 49k^3$. Ако $k \geq 3$, тогаш a има повеќе од 3 цифри. Ако $k = 1$, тогаш a има две цифри. Значи $k = 2$ и $a = 392$.

4. Даден е прав кружен цилиндер со дијаметар на основата 22 cm. Во него има две метални топките кои: го допираат ѕидот цилиндерот во две дијаметрално спротивни точки; се допираат меѓу себе и едната едната од нив го допира дното на цилиндерот. Топките имаат радиуси 5 cm и 7 cm. Во цилиндерот се турени 4,5 l вода. Дали водата ги покрива топките? Одговорот да се образложи.

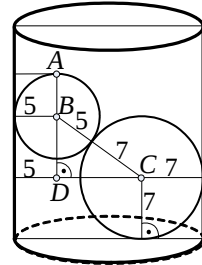
Решение. Нека A е точка од топките чие растојание до дното на цилиндерот е најголемо и нека тоа растојание го означиме со h (види цртеж). Од правоаголниот триаголник BCD се добива дека

$$\overline{BD} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{DC}^2} = \sqrt{12^2 - (22 - 12)^2} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}.$$

Значи, $h = 7 + 5 + \overline{BD} = 12 + 2\sqrt{11}$. Нека V е волуменот на цилиндерот со висина h , V_1 и V_2 волумените на топките со радиус 5 и 7 соодветно. За водата да ги покрие топките, треба $V - V_1 - V_2$ да биде помало од $4,5 \text{ dm}^3$. Со пресметување на волумените се добива дека:

$$V = 2\pi \cdot 11^2 \cdot (6 + \sqrt{11}) \text{ cm}^3, \quad V_1 = \frac{4\pi}{3} 5^3 \text{ cm}^3, \quad V_2 = \frac{4\pi}{3} 7^3 \text{ cm}^3,$$

од што следува дека $V - V_1 - V_2 = 2\pi(121(6 + \sqrt{11}) - \frac{250}{3} - \frac{686}{3}) \text{ cm}^3$, што е поголемо од $4,5 \text{ l}$. Значи, водата не ги покрива топките.



III година

1. Докажи дека бројот $A = 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{1985}$ е делив со 31.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} A &= (2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) + (2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10}) + \dots + (2^{1981} + 2^{1982} + 2^{1983} + 2^{1984} + 2^{1985}) \\ &= 2(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + 2^6(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + \dots + 2^{1981}(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) \\ &= 31(2 + 2^6 + 2^{11} + \dots + 2^{1981}) \end{aligned}$$

од каде што следува дека бројот A е делив со 31.

2. Реши ја неравенката $\log_3(x+2) \geq \log_{x+2} 3$.

Решение. Нека $a = \log_3(x+2)$ и $b = \log_{(x+2)} 3$. Тогаш $x+2 = 3^a$ и $3 = (x+2)^b$, т.е.

$x+2 = (x+2)^{ab}$. Според тоа $ab = 1$, т.е. $b = \frac{1}{a}$. Од $a \geq b$ следува дека $a \geq \frac{1}{a}$. За $a > 0$,

од $a^2 \geq 1$ следува дека $a \geq 1$. Тогаш $x+2 = 3^a \geq 3$, т.е. $x \geq 1$. За $a < 0$, од $a^2 \leq 1$

следува дека $-1 \leq a < 0$. Тогаш од $x+2=3^a$ се добива дека $3^{-1} \leq x+2 < 1$, т.е. $-\frac{5}{3} \leq x < -1$. Значи решенија на неравенката се $x \geq 1$ или $-\frac{5}{3} \leq x < -1$.

3. Да се најдат сите вредности на α за кои збирот од квадратите на корените на равенката

$$x^2 + (\sin \alpha - 1)x - \frac{1}{2} \cos^2 \alpha = 0$$

е најголем. Колкав е тој збир?

Решение. Од Виетовите правила следува дека

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \\ &= [-(\sin \alpha - 1)]^2 - 2\left(-\frac{1}{2} \cos^2 \alpha\right) \\ &= \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha + 1 + \cos^2 \alpha \\ &= 2 - 2 \sin \alpha = 2(1 - \sin \alpha) \end{aligned}$$

Значи, $x_1^2 + x_2^2$ има најголема вредност за $\sin \alpha = -1$ и тој збир $2(1+1) = 4$.

4. Во правилна тристрана призма впишана е топка што ги допира трите сидови и двете основи на призмата. Да се најде односот на плоштините на топката и призмата.

Решение. Нека a е страната на рамностраниот триаголник кој е основа на призмата, и нека R е радиусот на впишаната топка. Од условот на задачата следува дека радиусот на впишаната кружница во основата на призмата е R , т.е.

$R = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Бидејќи топката ги допира двете основи, висината h на призмата е $2R$, т.е. $R = \frac{h}{2}$. Нека P_1 и P_2 се плоштините на топката и призмата соодветно. Тогаш

$$P_1 = 4\pi R^2, \text{ а}$$

$$P_2 = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4} + a^2 \frac{\sqrt{3}}{4} + 3ah = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3ah = 2 \frac{(2\sqrt{3}R)^2 \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot 2\sqrt{3}R \cdot 2R = 18R^2 \sqrt{3}$$

Значи,

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{4\pi R^2}{18R^2 \sqrt{3}} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}.$$

IV година

1. Да се определи геометриското место на точките M од кои елипсата $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ се гледа под прав агол.

Решение. Нека $M(\alpha, \beta)$ е точка од која дадената елипса се гледа под права агол. Произволна права низ M има равенка

$$y - \beta = k(x - \alpha), \text{ т.е. } y = kx + \beta - k\alpha$$

или $x = \alpha$. Услов за правата $y = kx + \beta - k\alpha$ и елипсата да имаат точно една заедничка точка е системот равенки по x и y

$$y = kx + \beta - k\alpha, \quad b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

да има единствено решение, т.е. равенката

$$(b^2 + a^2k^2)x^2 + 2a^2k(\beta - k\alpha)x + a^2(\beta - k\alpha)^2 - a^2b^2 = 0$$

да има единствено решение. Значи, потребно е и доволно е дискриминантата да биде нула, т.е.

$$(a^2 - \alpha^2)k^2 - 2\beta\alpha k + b^2 - \beta^2 = 0.$$

Нека k_1 и k_2 се решенија на оваа квадратна равенка. За елипсата да се гледа под прав агол од M потребно е правите $y = k_1x + \beta - k_1\alpha$ и $y = k_2x + \beta - k_2\alpha$ да се сечат под прав агол, т.е. $k_1k_2 = -1$. Но, $k_1k_2 = \frac{b^2 - \beta^2}{a^2 - \alpha^2}$, од што следува дека $b^2 - \beta^2 = -a^2 + \alpha^2$, т.е. $\alpha^2 + \beta^2 = a^2 + b^2$. Ако правата $x = \alpha$ е тангентата на елипсата тогаш $\alpha = \pm a$ и за елипсата да се гледа под прав агол од M мора да биде $\beta = \pm b$. Значи и во овој случај $\alpha^2 + \beta^2 = a^2 + b^2$. Според тоа, бараното геометриско место е кружница со центар во $(0,0)$ и радиус $a^2 + b^2$.

2. Да се докаже дека 19 е делител на бројот

$$A_k = 5^{2k+1} \cdot 2^{k+2} + 3^{k+2} \cdot 2^{2k+1}$$

Решение. Доказот ќе го спроведеме со индукција по k . За $k = 1$ имаме

$$A_1 = 5^3 \cdot 2^3 + 3^3 \cdot 2^3 = 8 \cdot (125 + 27) = 8 \cdot 19 \cdot 8,$$

што значи дека A_1 е делив со 19. Нека тврдењето е точно за k , т.е. $A_k = 19m$; тогаш

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= 5^{2(k+1)+1} \cdot 2^{(k+1)+2} + 3^{(k+1)+2} \cdot 2^{2(k+1)+1} \\ &= 25 \cdot 2 \cdot 5^{2k+1} \cdot 2^{k+2} + 3 \cdot 4 \cdot 3^{k+2} \cdot 2^{2k+1} \\ &= 50(19m - 3^{k+2} \cdot 2^{2k+1}) + 12 \cdot 3^{k+2} \cdot 2^{2k+1} \\ &= 50 \cdot 19m - 38 \cdot 3^{k+2} \cdot 2^{2k+1} \\ &= 19(50m - 2 \cdot 3^{k+1} \cdot 2^{2k+1}) \end{aligned}$$

Следствено, бројот A_k е делив со 19 за секој природен број k .

3. Докаже дека: ако броевите a^2, b^2, c^2 се последователни членови на аритметичка прогресија, тогаш и броевите $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ се членови на аритметичка прогресија.

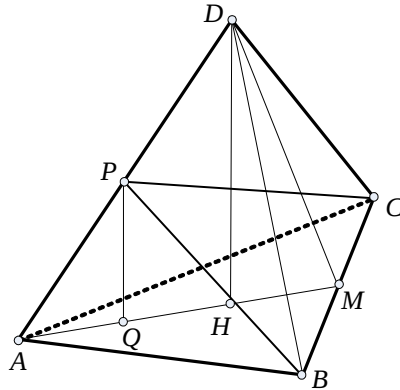
Решение. Бидејќи a^2, b^2, c^2 се последователни членови на аритметичка прогресија, следува дека $b^2 - a^2 = c^2 - b^2 \neq 0$. Тогаш

$$\begin{aligned} \frac{1}{c+a} - \frac{1}{c+b} &= \frac{b-a}{(c+a)(c+b)} = \frac{(b-a)(b+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \\ &= \frac{b^2 - a^2}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{c^2 - b^2}{(a+b)(b+c)(c+a)} \\ &= \frac{(c-b)(c+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{c-b}{(a+b)(c+a)} \\ &= \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+c} \end{aligned}$$

Значи, $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ се последователни членови на аритметичка прогресија.

4. Дадена е правилна триастрана пирамида со основен раб a и висина h . Да се најде плоштината на пресекот на пирамидата со рамнина која минува низ еден од основните рабови и низ средината на спротивниот бочен раб.

Решение. Нека $ABCD$ е дадената пирамида со основа ABC , нека P е средина на AD , нека пресекот е BPC , нека M е средина на BC и нека H е тежиштето на триаголникот ABC . Тогаш $\overline{DH} = h$ и $\overline{AM} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Нека Q е точка од MA за која $PQ \parallel DH$ (види цртеж). Бидејќи P е средина на AD , следува дека PQ е средна линија на триаголникот ADH и $\overline{PQ} = \frac{h}{2}$. Значи,



$$\overline{AQ} = \overline{QH} = \overline{MH} = \frac{\overline{AM}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \quad \text{и} \quad \overline{MQ} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Бидејќи $DH \perp MA$, следува дека $PQ \perp MQ$. Според тоа

$$\overline{PM}^2 = \overline{MQ}^2 + \overline{QP}^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{h^2}{4}$$

па бараната плоштина е

$$P = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{PM}}{2} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{h^2}{4}}.$$