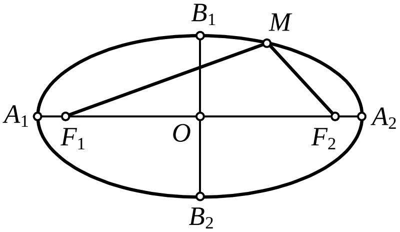
ПРОБЛЕМОТ НА ГЛАДНАТА КОЗА

П. Димиќ, Белград

На сите ни е познато што ќе се случи ако на ливада со јаже за еден кол врзиме гладна коза. Таа постепено ќе ја испаси целата трева на површината на кругот во чиј центар е закачен колот, а чиј радиус е еднаков на должината на јажето. Но, дали е можно козата да се врзи така што таа да може да ја испаси тревата само на површината на даден триаголник, правоаголник, ромб или некоја друга фигура. Е, тоа е веќе потешко да се одреди и за тоа ќе стане збор во овој напис.

Да тргнеме од поедноставното кон посложеното. Јасно, ако располагаме само со едно јаже и еден кол, тогаш не можеме да постигнеме ништо повеќе од веќе наведеното. Исто така, иако располагаме само со еден колец и повеќе јажиња повторно остануваме на истото. Но, ако можеме да искористиме два кола, тогаш можеме да постигниме нешто ново, па дури да имаме и само едно јаже.

Тоа можеме да го постигнеме ако јажето го провлечеме под околувратникот на козата, и потоа го затегнеме над земјата меѓу двата кола. Козата ќе може да ја испаси само тревата под затегнатото јаже. Но, многу поинтересено е ако јажето го врзиме за два кола, но не го затегнеме, туку колците ги поставиме така што нивното растојание $\overline{F_1F_2}$ (црт. 1) е помало од должината на јажето m. Од каква површина тогаш козата ќе може да ја испаси тревата?

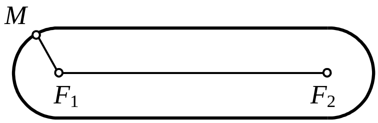


Црт. 1

Секако, тоа зависи од кривата која ќе ја ограничува површината по која козата ќе може да се движи. А каква ќе биде таа крива? Таа крива, очигледно, ќе го има својството да збирот на растојанијата од секоја нејзина точка до две постојани точки, во овој случај до точките F_1 и F_2, е константен и е еднаков на должината на јажето m. Значи, ако произволна точка на бараната крива ја

означиме со M, тогаш имаме $\overline{F_1M}+\overline{F_2M}=m.$ Кривата која го има ова својство се нарекува елипса.

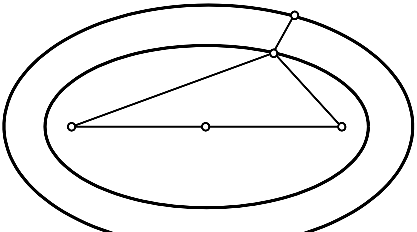
Елипсата, после кружницата, секако е една од најчесто користените криви во геометријата и на неа треба да се обрне посебно внимание. Но, тоа ќе го направиме во друга прилика.



Црт. 2

Сега да претпоставиме дека располагаме со два кола и со две јажиња, едно со должина m и второ со должина n. Потоа да претпоставиме дека на првото јаже сме ставиле алка и дека неговите краеви сме ги врзале за двата вземи закачени колци, а второто јаже сме го врзале со едниот крај за оковратникот на козата, а со другиот за алката, која се наоѓа на првото јаже. Тогаш, повторно се можни два случаи.

Прво, ако првото јаже е затегнато меѓу двата кола, тогаш козата ќе може, очигледно да ја испаси тревата само по површината која се состои од еден правоаголник со димензии mxn и два полукруга со радиуси n, како што е прикажано на црт. 2. А ако првото јаже не го затегнеме, туку колците ги поставиме така што растојанието меѓу нив е помало од должината m на првото јаже, тогаш контурата на површината по која козата ќе може да се движи, очигледно, повторно е една затворена крива, за која овде не можеме да расправаме, но чиј облик читателите можат да го констатираат на следниот начин: треба да се закачат две шајчиња на шперплоча, па тогаш користејќи подебели конци наместо јажиња, со врвот на пенкалото да го имитираат движењето на козата (црт. 3).

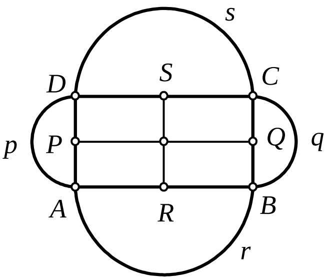


Црт. 3

Но, како ќе постигнеме козата да може да ја испаси само тревата на земјиште со облик на некој полигон, на пример правоаголник? На одговорот на ова прашање донекаде ни укажува и самиот црт. 2, чиј еден дел веќе претставува правоаголник кој само треба да се ограничи и на оние две страни, по чија должина се допира со полукруговите. А тоа можеме да го постигниме на следниот начин.

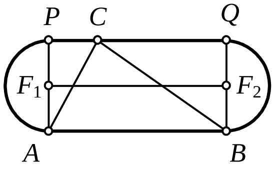
Нека ни е даден правоаголник $ABCD$ по кој козата треба да може да се движи и нека се a и b мерните броеви на неговата должина и ширина (црт. 4). Со P, Q, R и S да ги означиме средините на неговите страни AD, BC, AB и CE, соодветно, и да претпоставиме дека во овие четири точки се поставени колци

можат кои се затегнати јажиња PQ и RS. Потоа да претпоставиме дека за оковратникот на козата се врзани две јажиња: едното со должина $\frac{b}{2}$, чиј друг крај е врзан за алка која се наоѓа на јажето PQ и може по него слободно да се лизга; а другиот со должина $\frac{a}{2}$, чиј друг крај е врзан со алка која се наоѓа на јажето RS и може по него слободно да се лизга. И, што ќе се случи? Бидејќи козата е врзана со првото јаже таа ќе може слободно да се движи по правоаголникот $ABCD$ и по полукруговите ApD и BqC, но не и по полукруговите ArB и CsD, а со оглед на второто јаже со кое е врзана, таа ќе може да се движи по правоаголникот $ABCD$ и по полукруговите ArB и CsD, но не и по полукруговите ApD и BqC. Затоа козата ќе може да се движи само по правоаголникот $ABCD$.



Црт. 4

Најпосле, да видиме уште како може да се обезбеди врзаната коза да ја испаси тревата само на даден триаголник ABC.



Црт. 5

Ќе видиме дека и во овој случај може да се користат фигури како што е прикажана на црт. 2, при што истите се поставуваат така што дадениот триаголник им припаѓа на секоја од нив. Тоа ќе го направиме на следниот начин.

Низ темето C на дадениот триаголник ABC (црт. 5) повлекуваме права $PQ \parallel AB$ и во точките F_1 и F_2 ($\overline{F_1P}=\frac{\overline{AP}}{2}$, $AP \perp AB$) затегнуваме јаже со должина $m=\overline{AB}$ и на него со алка која слободно клизи врзуваме друго јаже со должина $n=\overline{AF_1}$ на чиј друг крај ја врзуваме козата. Сега козата ќе може да стигне до секоја точка на триаголникот ABC, но за неа ќе бидат непристапни сите точки од онаа страна на правата AB на која не се наоѓа триаголникот ABC. Потоа, ако на сличен начин постапиме и во однос на страните BC и AC на триаголникот ABC, тогаш за козата ќе бидат непристапни сите точки од оние страни на правите AB, BC и AC на кои не се наоѓа триаголникот ABC, а таа ќе може да допре до сите точки на триаголникот ABC. На овој начин ќе ја постигнеме саканата цел.

При овие разгледувања не го зедовме во обзир фактот дека затегнатото јаже не може во целост да го задржи обликот на права линија кога козата ќе се обиде да се оддалечи од него. Исто така, не го зедовме во обзир и фактот дека устата на козата не се наоѓа точно на другиот крај на јажето, но како првата, така и втората грешка во случајот ќа ја сметаме за занемарливо мала.

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

1. Како треба да се врзи козата ако се сака таа да може да ја испаси тревата само од:
   а) даден ромбоид; и б) даден правилен шестаголник.

2. Како треба да се врзи куче ако се сака тоа да може да ја брани површината само на:
   а) даден полукруг; и б) даден кружен исечок.

(Според написот "*Врзана коза*" од В.Крупски и А. Орлов од списанието "*Квант*", 1974/75 год.)

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на СММ