Колинеарност трију тачака

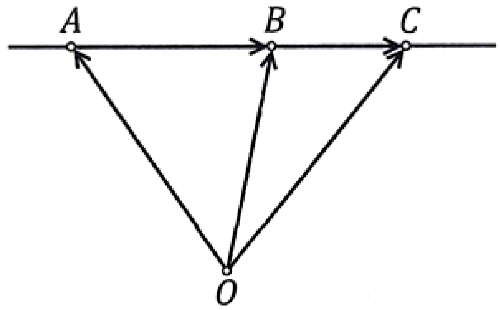
Драгољуб Милошевић, Горњи Милановац

Још у петом разреду основне школе ученици се сусрећу са појмом колинеарних тачака: тачке које припадају истој прави називају се колинеарне тачке. Даћемо једану тероему за три колинеарне тачке, као и неке примере њене примене. Циљ овог чланка је да колико–толико укаже младим математичарима на извесну далекосежност једне „мале" теореме, а и на применљивост апарата векторске алгебре.

Теорема. Ако су A, B и C колинеарне тачке и O нека тачка, тада важи

$$(*) \qquad \overrightarrow{OB} = (1-k)\cdot\overrightarrow{OA} + k\cdot\overrightarrow{OC},\ A \neq B.$$

Доказ. Нека тачке A, B и C припадају истој прави (слика 1). Тада је $\overrightarrow{AB} = k\cdot\overrightarrow{AC}$ за неко $0 < k < 1$.



Слика 1.

С обзиром на то да је

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA},$$

добијамо

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = k\cdot\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\right),$$

тј.

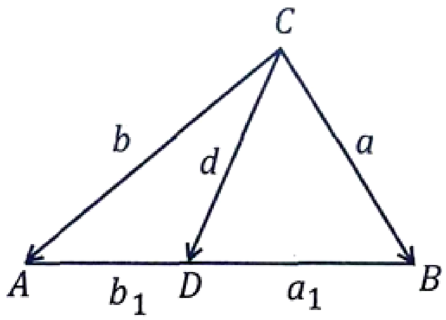
$$\overrightarrow{OB} = (1-k)\cdot\overrightarrow{OA} + k\cdot\overrightarrow{OC},$$

што је и требало да се докаже. □

Сада ћемо да укажемо на неке примене наведене теореме.

Задатак 1. Докажимо *Стјуартову теорему*: ако у троуглу ABC на страници AB одаберемо произвољну тачку D, онда (уз ознаке са слике 2) важи

$$(1) \qquad a^2b_1 + b^2a_1 - cd^2 = a_1b_1c.$$



Слика 2.

Решење. Сходно доказаној теореми, имамо

$$\overrightarrow{CD} = (1-k)\cdot\overrightarrow{CA} + k\cdot\overrightarrow{CB}$$

или

$$\overrightarrow{d} = (1-k)\cdot\overrightarrow{b} + k\cdot\overrightarrow{a}.$$

После квадрирања претходне једнакости добијамо

$$d^2 = (1-k)^2 b^2 + k^2 a^2 + 2k(1-k)\cdot\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a},$$

а одавде, због

$$2\cdot\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}^2 + \overrightarrow{a}^2 - \left(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}\right)^2 = a^2 + b^2 - c^2,$$

следи

(2) $$d^2 = ka^2 + (1-k)b^2 - k(1-k)c^2.$$

Ако у последњу једнакост уврстимо $k = \dfrac{b_1}{c}$, након сређивања, добијамо тражену једнакост (1).

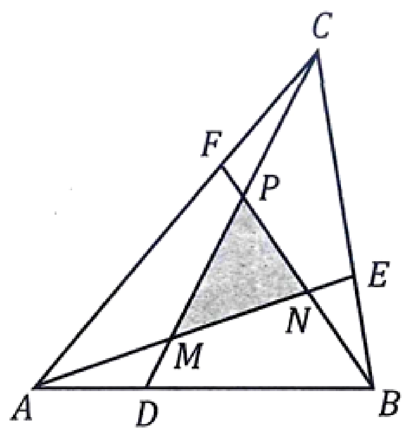
Задатак 2. На страницама AB, BC, CA троугла ABC одабране су тачке D, E, F редом тако да је

$$|AD| = \frac{1}{3}|AB|, \quad |BE| = \frac{1}{3}|BC| \quad \text{и} \quad |CF| = \frac{1}{3}|CA|.$$

Са M, N, P означимо пресеке правих CD и AE, BF и AE, CD и BF редом. Докажимо да је површина S_1 троугла MNP седам пута мања од површине S троугла ABC.

Решење. Троуглови ABC и ABE (слика 3) имају заједничку висину која полази из темена A. Како је $|BE| : |BC| = 1 : 3$, то је

(3) $$S_{ABE} = \frac{1}{3}\cdot S.$$



Слика 3.

С обзиром на то да тачка N припада одсечцима AE и BF, може се применити наведена теорема. На основу ње, имамо

$$\overrightarrow{CN} = (1-m)\cdot\frac{2}{3}\overrightarrow{CB} + m\cdot\overrightarrow{CA} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{CN} = (1-n)\cdot\overrightarrow{CB} + n\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}\right),$$

одакле је $m = \frac{1}{3}n$ и $\frac{2}{3}(1-m) = 1-n$. Последње две једнакости дају $m = \frac{1}{7}$. Тада је

$$\overrightarrow{CN} = \left(1-\frac{6}{7}\right)\cdot\overrightarrow{CA} + \frac{6}{7}\cdot\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}\right),$$

што значи да је

$$\frac{|AN|}{|AE|} = \frac{6}{7}.$$

Троуглови ABN и ABE имају заједничку висину (полази из темена B), па је

(4) $$S_{ABN} = \frac{6}{7}S_{ABE}.$$

На основу једнакости (3) и (4) следи

$$S_{ABN} = \frac{6}{7}\cdot\frac{1}{3}S = \frac{2}{7}S.$$

Аналогно добијамо да је

$$S_{BPC} = \frac{2}{7}S \quad \text{и} \quad S_{AMC} = \frac{2}{7}S.$$

Даље, имамо

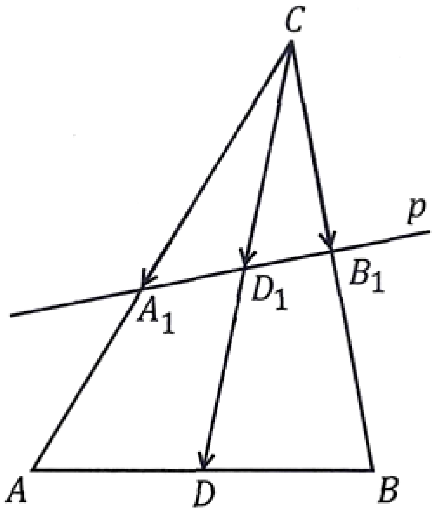
$$S_1 = S - (S_{ABN} + S_{BPC} + S_{AMC}) = S - \frac{6}{7}S = \frac{1}{7}S,$$

тј. $S_1 = \frac{1}{7}S$.

ЗАДАТАК 3. Дат је троугао ABC и тежишна дуж CD. Права p сече сужи CA, CB и CD редом у тачкама A_1, B_1 и D_1 (слика 4). Докажимо да је

$$\frac{1}{2}\left(\frac{|CA|}{|CA_1|}+\frac{|CB|}{|CB_1|}\right)=\frac{|CD|}{|CD_1|}. \tag{5}$$

Решење.



Слика 4.

Посматрајмо векторе $\overrightarrow{CA_1}$, $\overrightarrow{CB_1}$ и $\overrightarrow{CD_1}$:

$$\overrightarrow{CA_1}=k\cdot\overrightarrow{CA},\quad \overrightarrow{CB_1}=n\cdot\overrightarrow{CB},\quad \overrightarrow{CD_1}=m\cdot\frac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}}{2}. \tag{6}$$

Сада се једнакост (5) трансформише у следећу

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{m}. \tag{7}$$

Испуњени су сви услови за примену једнакости $(*)$, па је

$$\overrightarrow{CD_1}=(1-s)\overrightarrow{CB_1}+s\overrightarrow{CA_1}.$$

Ако једнакост (6) уврстимо у последњу једнакост, добијамо

$$\frac{m}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)=(1-s)n\cdot\overrightarrow{CB}+s\cdot k\cdot\overrightarrow{CA}$$

или

$$\left(\frac{m}{2}-sk\right)\overrightarrow{CA}+\left(\frac{m}{2}-n(1-s)\right)\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{0},$$

што је једино могуће ако

$$\frac{m}{2}-sk=0 \quad \text{и} \quad \frac{m}{2}-n(1-s)=0.$$

Одавде произлази

$$\frac{m}{2k} = s \text{ и } \frac{m}{2n} = 1 - s.$$

После сабирања ових двеју једнакости добијамо $\frac{m}{2k} + \frac{m}{2n} = 1$, тј.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{m},$$

а ово представља тражену једнакост (7).

Препоручујемо младим математичарима да ураде следећа три задатка.

ЗАДАТАК 4. Формулиши и докажи обрат наредне теореме.

ЗАДАТАК 5. Уопшти задатак 2.

ЗАДАТАК 6. Применом Стјуартове теореме (задатак 1) изрази у функцији страница троугла:

(а) тежишне дужи троугла,
(б) симетрале углова троугла,
(в) висине у троуглу.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2012/13 година