XXXIV РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

VI одделение

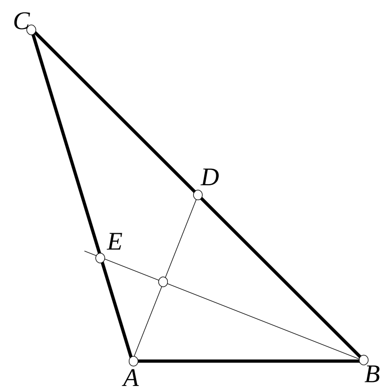
1. Шаховската табла е поделена на 64 единечни квадрати. Најди го бројот на сите квадрати на шаховската табла, кои се формирани од единечните квадрати.

Решение. Бројот на квадратите 1×1 на шаховската табла е $8^2=64$. Квадрати 2×2 ги има $7^2=49$, а 3×3 има $6^2=36$, 4×4 има $5^2=25$, 5×5 има $4^2=16$, 6×6 има $3^2=9$, 7×7 има $2^2=4$ и 8×8 има $1^2=1$. Според тоа на таблата има вкупно $64+49+36+25+16+9+4+1=204$ квадрати.

2. Човек и пол, за два и пол дена јаде три и пол леба. Колку леба ќе изедат 100 луѓе за 45 дена?

Решение.Човек и пол, за два и пол дена јаде три и пол леба. Значи тројца луѓе за 5 дена јадат $2\cdot2\cdot3{,}5=14$ леба. Еден човек за 1 ден јаде $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot14=\frac{14}{15}$ леба. Еден човек за 45 дена јаде $45\cdot\frac{14}{15}=42$ леба, а 100 луѓе за 45 дена јадат $42\cdot100=4200$ леба.

3. Даден е $\triangle ABC$ во кој должините на страните се последователни природни броеви. Тежишната линија од темето A е нормална на симетралата на аголот кај темето B. Да се пресмета периметарот на триаголникот $\triangle ABC$.



Решение. Нека D и E се пресечните точки на тежишната линија од A и симетралата на аголот од B, со страните BC и AC соодветно. Од $\triangle ABD$ следува $\overline{AB}=\overline{BD}$, бидејќи BE е симетрала на $\measuredangle B$, а ја сече AD под прав агол. Значи $\overline{BC}=2\cdot\overline{AB}$. Бидејќи $\overline{AB},\overline{BC},\overline{AC}$ се последователни броеви, имаме дека разликата $\overline{BC}-\overline{AB}$ е 1 или 2. Ќе ги разгледаме двата случаи посебно:

а) Ако $\overline{BC}-\overline{AB}=1$, следува $2\cdot\overline{AB}-\overline{AB}=1$ т.е $\overline{AB}=1$ и $\overline{BC}=2$. Од условот на задачата, должините на страните се последователни природни броеви, па според тоа $\overline{AC}=0$ или $\overline{AC}=3$. За $\overline{AC}=0$ имаме $\overline{AB}+\overline{AC}=0+1<2=\overline{BC}$, а за $\overline{AC}=3$ имаме $\overline{AB}+\overline{BC}=1+2=3=\overline{AC}$, што не е можно (збирот на должините на две страни не е поголем од должината на третата страна).

б) Ако $\overline{BC}-\overline{AB}=2$, следува $\overline{AB}=2$. Во тој случај имаме $\overline{BC}=4$, и јасно $\overline{AC}=3$.

Значи, периметарот на триаголникот е $L=2+3+4=9$.

4. Учениците од две одделенија се договориле да играат фудбал. Во едно од одделенијата немало доволен број на играчи да состават екипа од 11 ученици, па тие се договориле учениците од двете одделенија да се “измешаат” меѓу себе и потоа да состават две екипи. Наставникот забележал дека од првото одделение машки се $4/13$ од учениците, додека од второто одделение машки се $5/17$ од учениците. Секое од одделенијата има не повеќе од 50 ученици. Кое од одделенијата има повеќе девојчиња? (Одговорот да се образложи)

Решение.Нека бројот на ученици во првото одделение е x, а бројот на ученици во второто одделение е y.

Тогаш машки во првото одделение се $\frac{4x}{13}$, додека во второто се $\frac{5y}{17}$ на број. Бидејќи $\frac{4x}{13}$ мора да е природен број, мора $4x$ да се дели со 13 т.е. $x=13$, 26 или 39. Соодветно бројот на машки е 4, 8, 12.

Аналогно $\frac{5y}{17}$ мора да е природен, па мора $5y$ да се дели со 17, тогаш $y=17$ или 34. Соодветниот број на машки е 5 или 10.

Бидејќи $22=12+10$, имаме дека првото одделение брои ученици 39 од кои 12 машки т.е. 27 девојчиња. Второто одделение брои 34 ученици од кои 10 машки т.е. 24 девојчиња .

Значи првото одделение има повеќе девојчиња.

5. Дадени се пет кружници. Ако избереме било кои четири кружници од дадените пет, тие имаат заедничка точка. Докажи дека постои точка која е заеднчка за сите пет кружници.

Решение. Нека k_1, k_2, k_3, k_4 и k_5 се кружинците. Нека k_1, k_2, k_3 и k_4 минуваат низ A, k_1, k_2, k_4 и k_5 минуваат низ B и k_1, k_2, k_3 и k_5 минуваат низ C. Но тогаш k_1 и k_2 минуваат низ A, B и C и бидејќи сите се различни кружници мора две од точките A, B и C да се совпаѓаат. Без губење на општоста можеме да претпоставиме дека тоа се A и B. Односно $A \equiv B$. Но тогаш k_1, k_2, k_3, k_4 и k_5 минуваат низ A.

VII одделение

1. Докажи дека, за секој непарен број x изразот x^3+3x^2-x-3 е делив со 48.

Решение. Изразот x^3+3x^2-x-3 можеме да го запишеме како

$$x^3+3x^2-x-3=x^2(x+3)-(x+3)=(x+3)(x-1)(x+1).$$

Бидејќи x е непарен, имаме $x=2k-1, k\in\mathbb{N}$. Тогаш

$$x^3+3x^2-x-3=(2k-1+3)(2k-1-1)(2k-1+1)=8(k-1)k(k+1).$$

Јасно изразоте е делив со 8, а $(k-1)k(k+1)$ е делив со 6 како производ на три последователни броја. Значи, изразот е делив со 48 за секој непарен природен број x.

2. Дали постои природен број кај кој: првите 2009 цифри се тројки, наредните 2009 цифри се двојки, па наредните 2009 се единици, а останатите нули и е точен куб на природен број? (Одговорот да се образложи)

Решение. Дадениот број е од облик $n=\underbrace{33...3}_{2009}\underbrace{22...2}_{2009}\underbrace{11...1}_{2009}000...$. Нека $n=k^3$, каде $k\in\mathbb{N}$. Збирот на цифри на дадениот број е $6\cdot 2009=12054$. Според тоа $3|n$, од каде следува дека $3|k$, и $3^3|k^3=n$. Тоа не е можно бидејќи збирот на цифри на n не се дели со 9.

Значи таков број не постои.

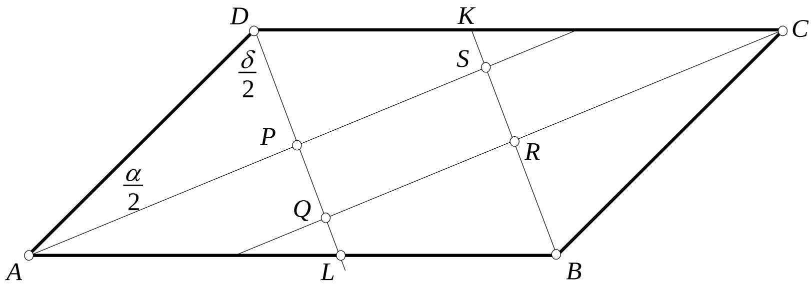
3. Даден е паралелограмот *ABCD*. Симетралите на неговите внатрешни агли се сечат во точките *P*, *Q*, *R* и *S*.

а) Докажи дека четириаголникот *PQRS* е правоаголник;

б) Докажи дека дијагоналата на тој правоаголник е еднаква со разликата од соседните страни на паралелограмот *ABCD*.

Решение. Нека е даден паралелограмот *ABCD* и нека симетралите на неговите внатрешни агли се сечат во точките *P*, *Q*, R и *S* (види цртеж).

а) Очигледно е дека симетралите на аглите кај темињата A и C се меѓусебно паралелни, а исто така и симетралите кај темињата B и D. Значи четириаголникот PQRS е паралелограм. Од ΔAPD имаме:



$$\frac{\alpha}{2}+\measuredangle P+\frac{\delta}{2}=180^\circ,$$

$$\frac{\alpha+\delta}{2}+\measuredangle P=180^\circ,$$

$$90^\circ+\measuredangle P=180^\circ$$

$$\measuredangle P=90^\circ.$$

Следи дека $\measuredangle QPS=90^\circ$ како накрсни агли со $\measuredangle P$, од што следува дека четириаголникот PQRS е правоаголник.

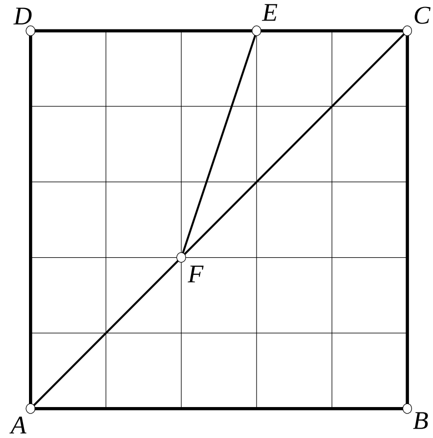
б) Триаголниците *APL* и *APD* се складни, бидејќи имаат заедничка страна *AP* и по два еднакви агли, т.е. $\measuredangle APL=\measuredangle APD=90^\circ$ и $\measuredangle PAL=\measuredangle PAD=\frac{\alpha}{2}$. Затоа $\overline{AL}=\overline{AD}, \overline{PL}=\overline{PD}$.

Аналогно се покажува дека $\overline{RB}=\overline{RK}, \overline{BC}=\overline{KC}$.

Тогаш, отсечката $\overline{PR}$ е средна линија за паралелограмот LBKD, од каде што следува дека

$$\overline{PR}=\overline{LB}=\overline{AB}-\overline{AL}=\overline{AB}-\overline{AD}.$$

4. Даден е квадрат $ABCD$ со страна $\overline{AB}=5$. На страната CD и дијагоналата AC избрани се точки E и F соодветно, такви што $\frac{\overline{AF}}{\overline{FC}}=\frac{\overline{CE}}{\overline{DE}}=\frac{2}{3}$. Да се пресмета $\overline{EF}$.

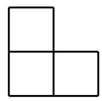


Решение. Од $\frac{\overline{CE}}{\overline{DE}}=\frac{2}{3}$ следува дека $\overline{DE}=\frac{3}{5}\overline{CD}$, слично и $\overline{FC}=\frac{3}{5}\overline{AC}$.

Ќе го разделиме квадратот на 25 единични квадрати секој со страна 2 тогаш од претходното имаме дека E и F се како на цртежот. Сега лесно се гледа дека

$$\overline{EF}^2=3^2+1^2=10 \text{ т.е. } \overline{EF}=\sqrt{10}.$$

5. На шаховска табла поставени се 31 жетон. Да се докаже дека при било кое разместување на жетоните на полињата на таблата, секој жетон на едно поле, секогаш постои „место“ за сместување на триаголно тримино (види цртеж: на полиња на кои нема поставено жетон).



Решение. Ја делиме дадената табла на 16 квадрати 2×2. Тогаш бидејќи имаме 31 жетон и 16 квадрати следува дека постои квадрат кој „содржи“ најмногу еден жетон (бидејќи ако таков квадрат не постои, би требало секој од 16-те квадрати да содржи барем по 2 жетона, т.е. вкупно би имале најмалку $16\cdot 2=32$ жетони, што не е можно). Па во тој квадрат секогаш може да се смести бараната фигура.

VIII одделение

1. Дали може во правоаголен триаголник во кој должините на страните се природни броеви, должините на катетите да се непарни броеви? Одговорот да се образложи.

Решение. Нека претпоставиме дека должините на катетите се непарни броеви, т.е. $a=2k+1$ и $b=2n+1$.Тогаш од Питагорина теорема добиваме

$$c^2=a^2+b^2=(2k+1)^2+(2n+1)^2=4(k^2+n^2+k+n)+2$$

Последното не е можно бидејќи c е природен број а квадратот на природен број е делив со четири или дава остаток еден при делење со четири. Значи, таков триаголник не постои.

2. Даден е квадрат со страна 49 cm. Раздели го дадениот квадрат на 2009 помали квадрати од два типа коишто имаат целобројни страни (должините на страните на делбените квадратите можат да имаат една од две различни целобројни вредности вредности).

Решение. Ќе разгледуваме квадрати со страни 1cm и 3cm. Бројот на квадратите со страна 3 cm нека е x. Тогаш бројот на квадратите со страна 1 cm ќе биде 2009-x. Збирот на плоштините на помалите квадратчиња ќе биде иста со збирот на плоштините на големиот квадрат, т.е.

$$(2009-x)\cdot 1+x\cdot 9=49^2$$
$$8x=392$$
$$x=49$$

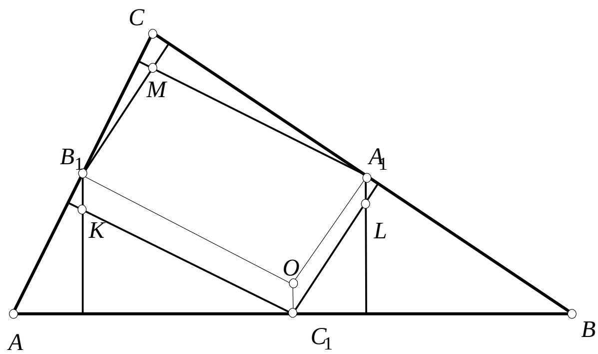
Според тоа, едно од можните решенија е: 49 квадрати со страна 3 cm и 1960 квадрати со страна 1 cm.

3. Од средините на страните на остроаголниот $\triangle ABC$ се повлечени нормали кон соседните страни. Докажи дека шестоаголникот што тие го формираат има два пати помала плоштина од плоштината на $\triangle ABC$.

Решение. Нека O е центарот на опишаната кружница околу триаголникот $\triangle ABC$. Нека A_1, B_1, C_1 се средините на страните BC, CA, AB соодветно. Точката O ја поврзуваме со A_1, B_1, C_1 и добиваме три паралелограми C_1OB_1K, A_1OC_1L и B_1OA_1M, чијашто вкупна плоштина е еднаква на плоштината на шестоаголникот. А од друга страна јасно дека нивната вкупна плоштина е двојно поглема од плоштината на $\triangle A_1B_1C_1$. Сега бидејќи важи

$$P_{\triangle A_1B_1C_1}=\frac{1}{4}P_{\triangle ABC}$$

следува бараниот резултат.



4. Да се определат сите природни броеви n за кои броевите $n+2$ и n^2+n+1 се точни кубови на природни броеви.

Решение. Нека претпоставиме дека n е природен број за кој $n+2$ и n^2+n+1 се точни кубови.

Тогаш јасно бројот $(n+2)(n^2+n+1)$ е исто така точен куб на природен број. Но

$$(n+2)(n^2+n+1)=n^3+3n^2+3n+2=(n+1)^3+1$$

и јасно не може да биде точен куб. Значи не постои природен број n за кој се исполнети условите на задачата.

5. На турнир во туркање на раце учествуваат n деца. Пред почетокот на турнирот, секое од децата добило реден број (прв, втор,...,n-ти натпреварувач). Турнирот ќе се одвива во два натпреварувачки дена по следниов систем на натпреварување:

- првиот ден прво се натпреваруваат првиот и вториот натпреварувач; победникот се натпреварува со третиот натпреварувач; победникот се натпреваруваат со четвртиот натпреварувач; итн…;
- вториот ден прво се натпреваруваат n-тиот и (n-1)-от натпреварувач; победникот се натпреварува со (n-2)-от натпреварувач; победникот се натпреварува со (n-3)-от натпреварувач; итн...;

Покажи дека некои двајца натпреварувачи ќе се натпреваруваат меѓу себе и првиот и вториот ден.

Решение. Првиот ден, да го разгледаме последното туркање: нека тоа е меѓу k-тиот и n-тиот натпреварувач. Тоа значи дека k-тиот натпреварувач ги победил (k+1)-от, (k+2)-от,...,(n-1)-натпреварувач, па затоа првиот ден ги имало следниве дуели: $\{k,k+1\},\{k,k+2\},\ldots,\{k,n\}$. Еден од овие дуели ќе го има и вториот ден.