

Регионален натпревар 1978

I година

1. Докажи дека квадратот на секој непарен природен број може да се запише во обликот $8p+1$ каде што p е ненегативен цел број.

Решение. Секој непарен природен број може да се запише во облик $2n+1$, каде што n е ненегативен цел број. Имаме

$$(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4n(n+1) + 1, \quad (1)$$

Понатаму, производот на два последователни цели броеви е парен број. Според тоа, производот $n(n+1)$ во (1) може да се напише во обликот $2p$, каде што p е ненегативен цел број, па имаме

$$(2n+1)^2 = 4 \cdot 2p + 1 = 8p + 1,$$

што и требаше да се докаже.

2. Разложи го на множители полиномот $x^3 - 7x + 6$.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} x^3 - 7x + 6 &= x^3 - x - 6x + 6 \\ &= x(x^2 - 1) - 6(x - 1) \\ &= x(x - 1)(x + 1) - 6(x - 1) \\ &= (x - 1)[x(x + 1) - 6] \\ &= (x - 1)(x^2 + x - 6) \\ &= (x - 1)(x^2 - 4 + x - 2) \\ &= (x - 1)[(x - 2)(x + 2) + x - 2] \\ &= (x - 1)(x - 2)(x + 2 + 1) \\ &= (x - 1)(x - 2)(x + 3). \end{aligned}$$

3. Таткото сега има 35 години, а синот има 7 години. По колку години таткото ќе биде двапати постар од синот?

Решение. Да го означиме со x бројот на годините што треба да поминат за таткото да биде двапати постар од синот. По изминувањето на x години, бројот на годините на таткото, $35 + x$, ќе биде двапати поголем од бројот на годините на синот, $7 + x$, па имаме

$$35 + x = 2(7 + x),$$

од каде што добиваме $x = 21$.

Значи, таткото ќе биде двапати постар од синот по 21 година.

4. Пет бакарни коцки со должини на рабовите 15, 16, 20, 24 и 30 cm соодветно, треба да се слеат во една топка. Да се пресмета дијаметарот на топката и односот од збирот на плоштините на коцките и плоштината на топката.

Решение. Да го означиме со $V (P)$ волуменот (плоштината) на топката чиј што радиус треба да се определи, а со V_1, V_2, V_3, V_4 и V_5 (P_1, P_2, P_3, P_4 и P_5) волумените (плоштините) на коцките чишто должини на рабовите се 15, 16, 20, 24 и 30 cm соодветно.

Јасно, збирот од волумените на коцките е еднаков со волуменот на топката, т.е.

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 = V,$$

т.е.

$$15^3 + 16^3 + 20^3 + 24^3 + 30^3 = \frac{4}{3} R^3 \pi,$$

од каде што добиваме $R = \sqrt[3]{\frac{42221,25}{\pi}}$ cm, па дијаметарот на топката е

$$D = 2R = 2\sqrt[3]{\frac{42221,25}{\pi}} \text{ cm}.$$

Сега да го определиме односот на збирот на плоштините на коцките спрема плоштината на топката. Имаме:

$$\frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5}{P} = \frac{6(15^2 + 16^2 + 20^2 + 24^2 + 30^2)}{4 \cdot 23,8^2 \pi} \approx 1,9.$$

II година

1. Збирот на цифрите на еден троцифрен број е 10. Цифрата на десетките е еднаква на збирот од цифрата на стотките и цифрата на единиците. Ако цифрата на единиците и цифрата на десетките си ги разменат местата се добива трицифрен број, којшто е за 9 помал од првобитниот број. Најди го тој број.

Решение. Ако x е цифрата на единиците, y цифрата на десетките и z - цифрата на стотките на бараниот трицифрен број, тогаш тој може да се запише во облик $x + 10y + 100z$. Бидејќи збирот на цифрите на бараниот број е 10, имаме:

$$x + y + z = 10. \quad (1)$$

Од друга страна, цифрата на десетките е еднаква со збирот од цифрата на единиците и цифрата на стотките, т.е.

$$y = x + z. \quad (2)$$

Кога цифрата на единиците и цифрата на десетките во дадениот трицифрен број ќе ги променат своите места, се добива трицифрен број $y + 10x + 100z$, којшто е за 9 помал од првобитниот број $x + 10y + 100z$, па имаме

$$y + 10x + 100z + 9 = x + 10y + 100z. \quad (3)$$

Решавајќи го системот составен од равенките (1), (2) и (3) добиваме $x = 4$, $y = 5$ и $z = 1$, па бараниот број е 154.

2. Нека P е внатрешна точка на триаголникот ABC . Да ги означиме со p_a , p_b и p_c растојанијата од точката P до страните BC , CA и AB соодветно, а со h_a , h_b и h_c висините спуштени од A , B и C соодветно. Да се докаже дека

$$\frac{p_a}{h_a} + \frac{p_b}{h_b} + \frac{p_c}{h_c} = 1.$$

Решение. Да ја означиме со S плоштината на триаголникот ABC , а со S_1 , S_2 и S_3 плоштините на триаголниците PBC , PCA и PAB соодветно. Според тоа, имаме

$$\frac{S_1}{S} = \frac{\frac{1}{2} \overline{BC} \cdot p_a}{\frac{1}{2} \overline{BC} \cdot h_a} = \frac{p_a}{h_a},$$

$$\frac{S_2}{S} = \frac{\frac{1}{2} \overline{CA} \cdot p_b}{\frac{1}{2} \overline{CA} \cdot h_b} = \frac{p_b}{h_b},$$

$$\frac{S_3}{S} = \frac{\frac{1}{2} \overline{AB} \cdot p_c}{\frac{1}{2} \overline{AB} \cdot h_c} = \frac{p_c}{h_c}.$$

Имајќи предвид дека плоштината на триаголникот ABC е збир на плоштините на триаголниците PBC , PCA и PAB , т.е. $S_1 + S_2 + S_3 = S$ па имаме

$$\frac{p_a}{h_a} + \frac{p_b}{h_b} + \frac{p_c}{h_c} = \frac{S_1}{S} + \frac{S_2}{S} + \frac{S_3}{S} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S} = \frac{S}{S} = 1.$$

3. Да се најде $\frac{1}{x_1^5} + \frac{1}{x_2^5}$, каде што x_1 и x_2 се решенијата на квадратната равенка $x^2 + kx + s = 0$.

Решение. Според Виетовите правила, решенијата x_1 и x_2 на дадената квадратна равенка ги задоволуваат равенствата

$$x_1 + x_2 = -k \text{ и } x_1 x_2 = s.$$

Користејќи го овој факт, како и идентитетот

$$x_1^5 + x_2^5 = (x_1 + x_2)(x_1^4 - x_1^3 x_2 + x_1^2 x_2^2 - x_1 x_2^3 + x_2^4)$$

имаме

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_1^5} + \frac{1}{x_2^5} &= \frac{x_1^5 + x_2^5}{x_1^5 x_2^5} = \frac{(x_1 + x_2)(x_1^4 - x_1^3 x_2 + x_1^2 x_2^2 - x_1 x_2^3 + x_2^4)}{(x_1 x_2)^5} \\ &= \frac{-k[(x_1^2 + x_2^2)^2 - x_1^2 x_2^2 - x_1^3 x_2 - x_1 x_2^3]}{s^5} \\ &= \frac{-k\{[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2]^2 - (x_1 x_2)^2 - x_1 x_2(x_1^2 + x_2^2)\}}{s^5} \\ &= \frac{-k\{(k^2 - 2s)^2 - (x_1 x_2)^2 - s[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2]\}}{s^5} \end{aligned}$$

$$= -\frac{k[(k^2-2s)^2-s^2-s(k^2-2s)]}{s^5} = -\frac{k(k^4-5k^2s+5s^2)}{s^5}.$$

4. Нека E е средина на страната AB од паралелограмот $ABCD$ и нека $M = AC \cap DE$. Најди ги соодносите $\overline{AM} : \overline{MC}$ и $\overline{DM} : \overline{ME}$.

Решение. Нека $\overline{AB} = \vec{a}$ и $\overline{AD} = \vec{b}$ (види цртеж). Имаме:

$$\overline{AM} = \lambda \overline{AC} = \lambda(\vec{a} + \vec{b})$$

$$\overline{DM} = \mu \overline{DE} = \mu(-\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}),$$

за некои броеви λ и μ . Бидејќи

$$\overline{AD} + \overline{DM} = \overline{AM},$$

добиваме

$$\vec{b} + \mu(-\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}) = \lambda(\vec{a} + \vec{b}),$$

а по средувањето

$$(\frac{1}{2}\mu - \lambda)\vec{a} = (\lambda + \mu - 1)\vec{b}.$$

Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не се колинеарни, па од претходното равенство следува, дека

$$\frac{1}{2}\mu - \lambda = 0$$

$$\lambda + \mu - 1 = 0,$$

од каде што добиваме $\lambda = \frac{1}{3}$, $\mu = \frac{2}{3}$.

Според тоа,

$$\overline{AM} : \overline{MC} = \frac{1}{3} : \frac{2}{3} = 1 : 2, \quad \overline{DM} : \overline{ME} = 2 : 1.$$

III година

1. Квадратниот трином $ax^2 + bx + c$, за $x=1; 2; 3$, добива вредности $0; 1; 4$ соодветно. Која вредност овој полином добива за $x=11$?

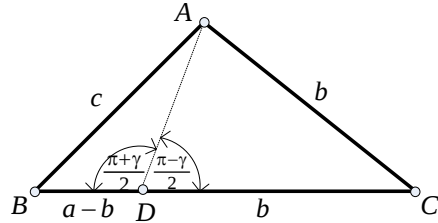
Решение. Од условите на задачата се добива следниов систем линеарни равенки со непознати a, b, c :

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 1 \\ 9a + 3b + c = 4 \end{cases}$$

Решавајќи го овој систем, се добива $a=1, c=1, b=-2$, па дадениот полином гласи $x^2 - 2x + 1$. Ако во добиениот полином ставиме $x=11$, добиваме дека бараната вредност е 100.

2. Конструирај го триаголникот ABC ако се познати следните елементи: разликата $a-b$ на страните BC и AC , страната $\overline{AB} = c$ и збирот на аглие $\alpha + \beta$ кај темињата A и B .

Решение. Ако на страната BC на триаголникот ABC земеме точка D таква што $\overline{CD} = \overline{CA}$ (цртеж десно), тогаш триаголникот ADC е рамнокрак. Од тука следува дека $\angle ADC = \frac{\pi - \gamma}{2}$, односно



$$\angle BDA = \frac{\pi + \gamma}{2} = \frac{\pi + \pi - (\alpha + \beta)}{2} = \pi - \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Сега, триаголникот BDA може да се конструира, бидејќи се познати две негови страни: $\overline{BD} = a - b$, $\overline{BA} = c$ и еден негов агол $\angle BDA = \pi - \frac{\alpha + \beta}{2}$. Во пресеко на правата BD со симетралата на страната AD се наоѓа третото теме C на бараниот триаголник ABC .

3. Докажи го идентитетот

$$\frac{1}{\log_5 x} + \frac{1}{\log_{5^2} x} + \frac{1}{\log_{5^3} x} + \dots + \frac{1}{\log_{5^{10}} x} = \frac{55}{\log_5 x}.$$

Решение. Ако го искористиме идентитетот $(\log_a b)^{-1} = \log_b a$, добиваме

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log_5 x} + \frac{1}{\log_{5^2} x} + \frac{1}{\log_{5^3} x} + \dots + \frac{1}{\log_{5^{10}} x} &= \log_x 5 + \log_x 5^2 + \dots + \log_x 5^{10} \\ &= \log_x 5 + 2\log_x 5 + \dots + 10\log_x 5 \\ &= (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 10)\log_x 5 \\ &= 55\log_x 5 = \frac{55}{\log_5 x}. \end{aligned}$$

4. Нека α, β, γ се аглие во некој триаголник. Докажи дека

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 2. \quad (1)$$

Решение. Бидејќи $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, имаме

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} + \frac{1 - \cos 2\beta}{2} + \sin^2 [\pi - (\alpha + \beta)] \\ &= 1 - \frac{1}{2}[\cos 2\alpha + \cos 2\beta] + \sin^2 (\alpha + \beta) \\ &= 1 - \frac{1}{2}[\cos 2\alpha + \cos 2\beta] + 1 - \cos^2 (\alpha + \beta) \\ &= 2 - \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) - \cos^2 (\alpha + \beta) \\ &= 2 - \cos(\alpha + \beta)[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \\ &= 2 - 2 \cos(\alpha + \beta) \cos \alpha \cos(-\beta) = 2 + 2 \cos \gamma \cos \alpha \cos \beta \end{aligned}$$

од каде што се добива (1).

IV година

1. На провидна плоча се наоѓа непровидна топка со радиус R . Над топката, на замислена права којашто минува низ центарот на топката и стои нормално на плочата, се наоѓа светлосен извор во облик на точка, оддалечен од плочата за a ($a > 2$) топкини радиуси.

а) Пресметај плоштината на осветлената површина од топката и плоштината на сенката на топката врз плочата.

б) Што се случува со тие плоштини кога a неограничено расте.

Решение. а) Од сличноста на триаголниците $\triangle CEO$ и $\triangle SCO$ (цртеж 3), добиваме

$$\frac{\overline{OE}}{\overline{CO}} = \frac{\overline{CO}}{\overline{OS}}, \quad \frac{R - \overline{EF}}{r} = \frac{R}{(a-1)R},$$

т.е.

$$\overline{EF} = R \frac{a-2}{a-1}.$$

Според тоа, плоштината на осветлениот дел на топката е

$$P_1 = 2\pi R^2 \frac{a-2}{a-1} = 2\pi R^2 \left(1 - \frac{1}{a-1}\right).$$

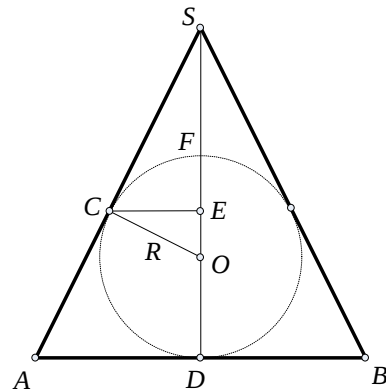
Од сличноста на триаголниците $\triangle ADS$ и $\triangle SCO$, добиваме:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AD}}{\overline{SD}} = \frac{\overline{CO}}{\overline{CS}} &\Leftrightarrow \frac{\overline{AD}}{aR} = \frac{R}{\sqrt{(a-1)^2 R^2 - R^2}} \\ &\Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{aR}{\sqrt{a^2 - 2a}}, \end{aligned}$$

па плоштината на сенката од топката врз плочата е

$$P_2 = \frac{\pi a R^2}{a-2} = R^2 \left(1 + \frac{2}{a-2}\right).$$

б) Ако $a \rightarrow \infty$, тогаш $P_1 \rightarrow 2\pi R^2$ и $P_2 \rightarrow R^2 \pi$.



2. Сумата на членовите од една бескрајна опаѓачка геометриска прогресија што стојат на непарни места е 36, а сумата на членовите што стојат на парни места од истата геометриска прогресија е 12. Да се најде прогресијата.

Решение. Ако $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ е бесконечна опаѓачка геометриска прогресија со количник q , тогаш низите $a_1, a_3, \dots, a_{2k+1}, \dots$ и $a_2, a_4, \dots, a_{2k}, \dots$, се бесконечни геометрички прогресии со количник q^2 . Според условот на задачата, последните две низи имаат збир 36 и 12 соодветно, т.е.

$$\frac{a_1}{1-q^2} = 36 \quad \text{и} \quad \frac{a_2}{1-q^2} = 12.$$

Имајќи предвид дека $a_2 = a_1 q$, со решавање на системот

$$\frac{a_1}{1-q^2} = 36, \quad \frac{a_1 q}{1-q^2} = 12,$$

добиваме дека $a_1 = 32$, $q = \frac{1}{3}$.

Значи, бараната прогресија гласи: $32, \frac{32}{3}, \frac{32}{9}, \dots$.

3. Нека P_1 и P_2 се пресеците на произволна тангента од елипсата

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (a > b)$$

со тангентите на таа елипса што се повлечени во темињата на нејзината главна оската. Докажи дека отсечката $P_1 P_2$ се гледа од кој било фокус на елипсата под прав агол.

Решение. Фокуси на елипсата се $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$, каде што $c^2 = a^2 - b^2$. Равенката на тангентата на елипсата, повлечена во една нејзина произволна точка (x_0, y_0) , гласи $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$. Пресеците на оваа тангента со правите $x = a$ и $x = -a$ се точките

$$P_1(a, \frac{b^2}{y_0}(1 - \frac{x_0}{a})) \quad \text{и} \quad P_2(-a, \frac{b^2}{y_0}(1 + \frac{x_0}{a})).$$

Коефициентите на правците на правите $P_1 F_1$ и $P_2 F_2$ се

$$k_1 = \frac{b^2}{y_0} \frac{1 - \frac{x_0}{a}}{a - c} \quad \text{и} \quad k_2 = \frac{b^2}{y_0} \frac{1 + \frac{x_0}{a}}{-a - c},$$

па имаме

$$k_1 k_2 = \frac{b^2}{y_0} \frac{1 - \frac{x_0}{a}}{a - c} \frac{b^2}{y_0} \frac{1 + \frac{x_0}{a}}{-a - c} = \frac{b^4}{y_0^2} \frac{1 - \frac{x_0^2}{a^2}}{-(a^2 - c^2)} = \frac{b^4}{y_0^2} \frac{\frac{y_0^2}{b^2}}{-(a^2 - c^2)} = \frac{b^2}{-(a^2 - c^2)} = -1.$$

Значи, правите $P_1 F_1$ и $P_2 F_1$ зафаќаат прав агол, т.е. отсечката $P_1 P_2$ се гледа од фокусот F_1 под прав агол.

Поради симетрија, истото тврдење важи и за фокусот F_2 .

4. Од коцки со рабови 1 cm направен е правоаголен паралелопипед со рабови $a\text{ cm}, b\text{ cm}, c\text{ cm}$ (a, b, c се природни броеви поголеми од 1). Вака добиениот паралелопипед однадвор е обоен црвено. Колку коцки од кои е направен паралелопипедот, имаат:

- само три сидови обоени црвено;
- само два сида обоени црвено;
- само еден сид обоен црвени;
- ниту еден сид обоен црвено.

Решение. а) само три сидови обоено црвено имаат осум коцки, коишто се наоѓаат во темињата на паралелопипедот.

б) Само два црвено обоени зида имаат оние коцки, коишто се наоѓаат на рабовите на паралелопипедот, исклучувајќи ги коцките од темињата, а нивниот број е

$$4(a-2) + 4(b-2) + 4(c-2).$$

в) Само еден црвено обоен сид имаат коцките, чијашто само една страна се наоѓа на површината на паралелопипедот. Нивниот број ќе го добиеме ако од бројот на сите коцки што се наоѓаат на површината на паралелопипедот го извадиме бројот на коцките со по два или три обоени сидови. Тој број изнесува

$$2[(a-2)(b-2) + (b-2)(c-2) + (c-2)(a-2)].$$

г) Ниту еден црвено обоен сид имаат коцките, коишто се наоѓаат во внатрешноста на паралелопипедот. Нив ги има на број $(a-2)(b-2)(c-2)$ (тие образуваат паралелопипед со рабови $a-2, b-2, c-2$).