БМО 1995

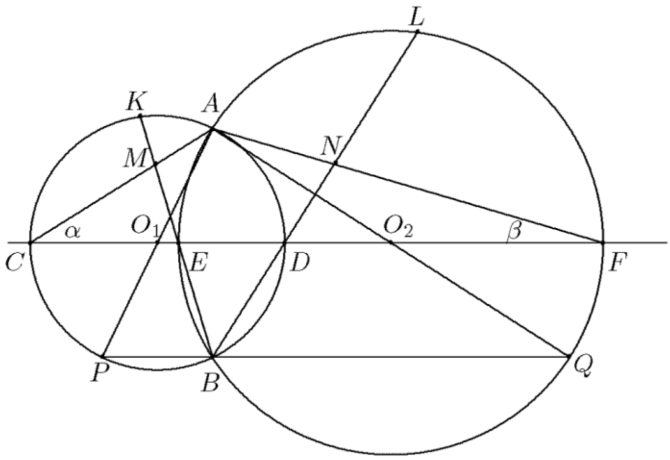
1. Определи ја вредноста на изразот
$$(...(((2*3)*4)*5)*...)*1995$$
каде $x*y=\frac{x+y}{1+xy}$ за произволни позитивни броеви x и y.

Решение. *Прв начин.* Нека $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ и $n*=(...(((2*3)*4)*5)*...)*n$. Непосредно се проверува дека $f(x*y)=f(x)f(y)$ и затоа
$$f(n*)=f(2)f(3)...f(n)=(-1)^n\frac{2}{n(n+1)}.$$
Оттука, ако во $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ ставиме $x=n*$ добиваме $f(n*)=\frac{1-n*}{1+n*}$, односно
$$n*=\frac{1-f(n*)}{1+f(n*)}=\frac{n(n+1)+2(-1)^n}{n(n+1)-2(-1)^n}.$$
Во случајов $1995*=\frac{1991009}{1991011}$.

Втор начин. Со индукција се докажува дека $n*=\frac{n(n+1)+2(-1)^n}{n(n+1)-2(-1)^n}$, за $n\geq 3$. Навистина, за $n=3$ имаме $2*3=\frac{2+3}{1+2\cdot 3}=\frac{5}{7}=\frac{3\cdot 4-2}{3\cdot 4+2}=\frac{3\cdot 4+2(-1)^3}{3\cdot 4-2(-1)^3}$. Нека претпоставиме дека за $n-1$ важи $(n-1)*=\frac{(n-1)n+2(-1)^{n-1}}{(n-1)n-2(-1)^{n-1}}$. Тогаш
$$n*=((n-1)*)*n=\frac{(n-1)n+2(-1)^{n-1}+n((n-1)n-2(-1)^{n-1})}{(n-1)n-2(-1)^{n-1}+n((n-1)n+2(-1)^{n-1})}$$
$$=\frac{(n-1)n+n(n-1)n-2(-1)^{n-1}(n-1)}{(n-1)n+n(n-1)n+2(-1)^{n-1}(n-1)}=\frac{n+n^2-2(-1)^{n-1}}{n+n^2+2(-1)^{n-1}}=\frac{n(n+1)+2(-1)^n}{n(n+1)-2(-1)^n}.$$
Во случајов $1995*=\frac{1991009}{1991011}$.

2. Дадени се кружниците $c_1(O_1,r_1)$ и $c_2(O_2,r_2)$, кои се сечат во точките A и B, при што $r_2>r_1$ и $\measuredangle O_1AO_2=90^\circ$. Правата O_1O_2 ја сече c_1 во точките C и D, а c_2 ја сече во точките E и F (E е меѓу C и D, а D е меѓу E и F). Правата BE ги сече кружницата c_1 во точката K и правата AC во точката M, а правата BD ги сече кружницата c_2 во точката L и правата AF во точката N. Докажи, дека
$$\frac{r_2}{r_1}=\frac{\overline{KE}}{\overline{KM}}\cdot\frac{\overline{LN}}{\overline{LD}}.$$

Решение. *Прв начин.* Нека $P=AO_1\cap c_1$, $Q=AO_2\cap c_2$, $\measuredangle ACO_1=\alpha$ и $\measuredangle AFO_2=\beta$. Тогаш $\measuredangle AFL=\measuredangle ABD=\measuredangle ACD=\alpha$ и аналогно $\measuredangle ACK=\beta$. Од друга страна имаме $\measuredangle APB=2\alpha$ и $\measuredangle AQB=2\beta$. Сега од $\triangle MKC$ и $\triangle CKE$ соодветно добиваме, дека $\overline{KM}=\frac{\overline{CK}\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)}$ и $\overline{KE}=\frac{\overline{CK}\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta}$. Според тоа, $\frac{\overline{KE}}{\overline{KM}}=\frac{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}{\sin\beta\cos\beta}$ и аналогно $\frac{\overline{LN}}{\overline{LD}}=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$. Од последните две равенства следува $\frac{\overline{KE}}{\overline{KM}}\cdot\frac{\overline{LN}}{\overline{LD}}=\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta}$. Останува да забележиме, дека $\measuredangle ABP=\measuredangle ABQ=90^\circ$ и значи $\frac{\overline{AB}}{2r_1}=\sin 2\alpha, \frac{\overline{AB}}{2r_2}=\sin 2\beta$. Според тоа,

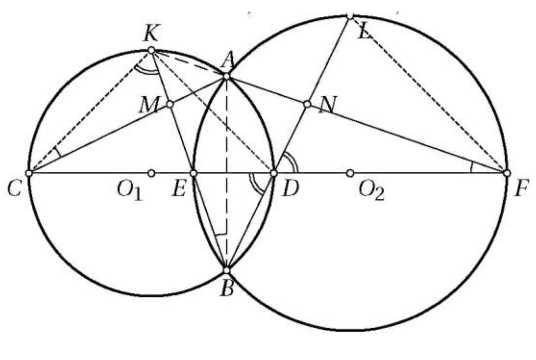


$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta}=\frac{\overline{KE}}{\overline{KM}}\cdot\frac{\overline{LN}}{\overline{LD}}.$$

Забелешка. Тврдењето на задачата го докажавме без да го искористиме условот $\measuredangle O_1AO_2=90^\circ$, што значи дека задачата е предефинирана.

Втор начин. Бидејќи

$$\begin{aligned}\measuredangle KCD=\measuredangle EBD&=180^\circ-\measuredangle BED-\measuredangle BDE\\&=180^\circ-(90^\circ-\tfrac{1}{2}\measuredangle BO_2E)-(90^\circ-\tfrac{1}{2}\measuredangle BO_1D)\\&=\tfrac{1}{2}\measuredangle O_1BO_2=45^\circ\end{aligned}$$



и

$$\measuredangle CAF = 90^\circ + 90^\circ - \measuredangle E\,AD = 135^\circ,$$

точките F, A и k се колинеарни. Аналогно $\measuredangle LFD = 45^\circ$. Сега ги имаме следниве сличности:

- $\triangle KCM \sim \triangle DFN$ ($\measuredangle KCM = \measuredangle KBA = \measuredangle DFN$ и $\measuredangle CKM = \measuredangle CDB = \measuredangle FDN$) и оттука следува $\overline{KM} = \overline{KC} \cdot \frac{\overline{DN}}{\overline{DF}}$,
- $\triangle KEC \sim \triangle DLF$ ($\measuredangle KCE = \measuredangle DLF = 45^\circ$ и $\measuredangle CKE = \measuredangle FDL$) и оттука следува $\overline{KE} = \overline{KC} \cdot \frac{\overline{LD}}{\overline{FD}}$,
- $\triangle KDN \sim \triangle FLN$ ($KD \parallel LF$ и $A \in KN$) и оттука следува $\overline{LN} = \overline{LF} \cdot \frac{\overline{DN}}{\overline{KD}}$.

Сега,

$$\frac{\overline{KE}}{\overline{KM}} \cdot \frac{\overline{LN}}{\overline{LD}} = \frac{\overline{KC} \cdot \frac{\overline{LD}}{\overline{FD}}}{\overline{KC} \cdot \frac{\overline{DN}}{\overline{DF}}} \cdot \frac{\overline{LF} \cdot \frac{\overline{DN}}{\overline{KD}}}{\overline{LD}} = \frac{\overline{LF}}{\overline{KD}} = \frac{r_2\sqrt{2}}{r_1\sqrt{2}} = \frac{r_2}{r_1}.$$

3. Нека $a, b \in \mathbb{N}, a > b$ и $a+b$ е парен број. Докажи, дека корените на равенката

$$x^2 - (a^2 - a + 1)(x - b^2 - 1) - (b^2 + 1)^2 = 0$$

се природни броеви, но ниту еден од нив не е точен квадрат.

Решение. Корените на равенката се $x_1 = b^2 + 1$ и $x_2 = a^2 - b^2 - a$. Јасно, тие се природни броеви и x_1 не е точен квадрат. Да претпоставиме дека постојат природни броеви $a > b$, за кои $a+b$ е парен број и x_2 е точен квадрат, на пример c^2. Тогаш $m = \frac{a+b}{2}$ и $n = \frac{a-b}{2}$ се природни броеви и важи

$$(4m-1)(4n-1) = 4(4mn - m - n) + 1 = 4(a^2 - b^2 - a) + 1 = (2c)^2 + 1.$$

Според тоа, бројот $(2c)^2 + 1$ има прост делител од видот $4k-1$. Како што е познато, на пример, следува од малата теорема на Ферма, дека тој делител треба да е делител на $2c$ и 1, што е противречност.

4. Нека n е природен број и S е множеството од сите точки (x, y), каде x и y се природни броеви и $x \le n, y \le n$. Нека T е множеството од сите квадрати со темиња од S. Со a_k, $k \ge 0$ да го означиме бројот на паровите точки од S, кои се темиња на точно k квадрати од T. Докажи дека $a_0 = a_2 + 2a_3$.

Решение. Бидејќи $a_k = 0$, за $k > 3$, бројот на паровите различни точки од S е еднаков на $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = \binom{n^2}{2}$. Бројот на квадратите од T, чии страни се паралелни со координатните оски и имаат должина k е еднаков на $(n-k)^2$.

Секој од тие квадрати содржи $k-1$ квадрати чии темиња лежат на неговите страни и чии страни се паралелни со координатните оски. Според тоа, бројот на сите квадрати од $\mathbf{T}$ е еднаков на

$$\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)\,j^2=n\sum_{j=1}^{n-1}j^2-\sum_{j=1}^{n-1}j^3=n\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}-\frac{n^2(n-1)^2}{4}=\frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

Од друга страна, ако земеме предвид дека темињата на секој квадрат генерираат 6 парови точки од S, добиваме дека бројот на сите квадрати од $\mathbf{T}$ е еднаков на $\frac{a_1+2a_2+3a_3}{6}$. Според тоа,

$$a_1+2a_2+3a_3=\frac{n^2(n^2-1)}{2}=\binom{n^2}{2}=a_0+a_1+a_2+a_3,$$

од каде следува дека $a_0=a_2+2a_3$.