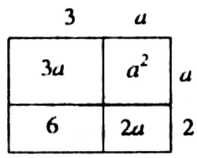
XVIII РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

V-1 **Од 68 ученици во петтите одделенија, 38 ученици се претплатиле на "Нумерус", а 17 ученици се претплатиле на "Наш свет". На двете списанија се претплатиле 10 ученици. Колку ученици се претплатиле а) само на "Нумерус"? б) само на "Наш свет"?**

Решение. а) На "Нумерус" се претплатиле 38 ученици, од кои 10 ученици се претплатиле и на "Наш свет". Значи, само на "Нумерус" се претплатиле 38-10=28 ученици. б) Слично: само на "Наш свет" се претплатиле 17-10 = 7 ученици.

V-2 **Ако едната страна на правоаголникот ја намалиме за 3 cm, а другата ја намалиме за 2cm, ќе добиеме квадрат, чија што плоштина е за 21 cm^2 помала од плоштината на правоаголникот. Пресметај ги димензиите на правоаголникот.**



Решение. Ако со a ја означиме должината на страната на квадратот, тогаш димензиите на правоаголникот се a+3 и a+2. Од цртежот се гледа дека правоаголникот е поделен на квадрат со плоштина a^2 и на три правоаголници со плоштини $2a$, $3a$ и 6. Бидејќи плоштината на квадратот е за 21cm^2 помала од плоштината на правоаголникот, следува дека $2a+3a+6=21$, односно $5a=15$. Оттука добиваме $a=3cm$. Значи, димензиите на правоаголникот се 6cm и 5cm.

Забелешка: За цртеж од кој произлегува равенството $2a+3a+6=21$, се добиваат 5 бода.

V-3 Ако на некој број му допишеме оддесно нула, па добиениот број го поделиме со 15, потоа на добиениот количник оддесно му допишеме 3 и така добиениот број го поделиме со 13, ќе добиеме 11. Кој е тој број?

Решение. Ако ги помножиме 11 и 13 добиваме 143. Ако од бројот 143 ја изоставиме цифрата 3, го добиваме бројот 14. Ако 14 го помножиме со 15, добиваме 210. Ако од 210 ја изоставиме нулата, го добиваме бројот 21. Тоа е и бараниот број.

V-4 Татко, мајка, ќерка и син имаат заедно 79 години. Таткото е постар од мајката 3 години, а ќерката од синот е постара 2 години. Пред четири години таткото и мајката заедно имале 55 години. Колку години има секој од нив сега?

Решение. Таткото и мајката пред 4 години заедно имале 55 години, а сега имаат вкупно $55+2\cdot 4=63$ години. Таткото од мајката е постар 3 години, па мајката има $(63-3):2=30$ години, а таткото 33 години. Ќерката и синот заедно имаат 79-63=16 години. Ќерката од синот е постара 2 години, па синот сега има $(16-2):2=7$ години, а ќерката 9 години.

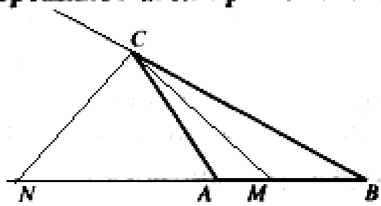
VI-1 Еден автомобил поминал 150 km за 4 часа. Првоит час поминал $\frac{4}{15}$ од патот, вториот час поминал $\frac{5}{8}$ од патот што го поминал првиот час, а третиот час поминал $\frac{2}{3}$ од патот што го поминал првиот и вториот час заедно. Колку километри поминал четвртиот час?

Решение. Изминатиот пат на автомобилот во километри е:

- првиот час: $\frac{4}{5}\cdot 150=40$ km; вториот час: $\frac{5}{8}\cdot 40=25$ km;
- третиот час: $\frac{2}{3}\cdot(40+25)=\frac{2}{3}\cdot 65=43\frac{1}{3}$ km;

Четвртиот час поминал $150-\left(40+25+43\frac{1}{3}\right)=41\frac{2}{3}$ km.

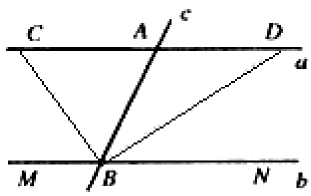
VI-2 За внатрешните агли α и β на триаголникот ABC важи $\alpha-\beta=90^\circ$. Ако M и N се пресечните точки на правата AB со симетралите на внатрешниот и надворешниот агол при темето C, тогаш $\overline{CM}=\overline{CN}$. Докажи!



Решение. Од условот α-β=90° следи дека ΔABC е тапоаголен, со тап агол при темето A . Очигледно $\measuredangle AMC=\frac{\gamma}{2}+\beta$, како надворешен агол за ΔMCB. Од ΔAMC имаме $\alpha+\frac{\gamma}{2}+\measuredangle AMC=180^\circ$. Оттука добиваме $\alpha-\beta+\beta+\frac{\gamma}{2}+\measuredangle AMC=180^\circ$, односно $2\measuredangle AMC=90^\circ$. Значи $\measuredangle AMC=45^\circ$. Бидејќи CM и CN се симетрали на внатрешниот и на надворешниот агол при темето C, следува дека аголот меѓу нив е 90°, т.е. $\measuredangle MCN=90^\circ$. Од ΔMCN имаме $\measuredangle CNM=180^\circ-\measuredangle NMC-\measuredangle MCN=180^\circ-45^\circ-90^\circ=45^\circ$

Значи триаголникот MCN е рамнокрак, па $\overline{CM}=\overline{CN}$.

VI-3 Правата c ги сече паралелните прави a и b во точките A и B соодветно. На правата b се избрани точки M и N на различни страни од точката B. Симетралите на аглите ABM и ABN ја сечат правата a во точките C и D соодветно. Докажи дека $\overline{AC}=\overline{AD}$.

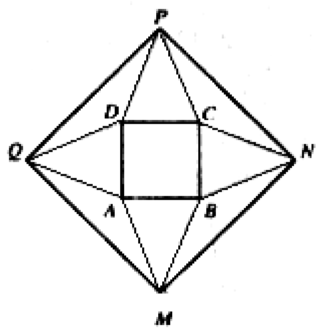


Решение. Бидејќи $\angle MBC=\angle BCA$ (наизменични агли), $\angle MBC=\angle ABC$ (BC е симетрала на $\angle MBA$), следува дека $\angle ABC=\angle BCA$. Значи триаголникот CBA е рамнокрак и $\overline{AC}=\overline{AB}$. Бидејќи $\angle NBD=\angle BDA$ (наизменични агли), $\angle NBD=\angle ABD$ (BD е симетрала на $\angle NBA$), следува дека $\angle ABD=\angle BDA$, т.е. ΔBDA е рамнокрак, $\overline{AD}=\overline{AB}$, следи $\overline{AC}=\overline{AD}$.

VI-4 Најди ги сите цифри на бројот $\overline{64a4b}$ такви што при делење со 5 добиваме остаток 2, при делење со 4 добиваме остаток 3, а при делење со 3 добиваме остаток 1.

Решение. Ако бројот $\overline{64a4b}$ при делењето со 5 дава остаток 2, тогаш b=2 или b=7. Ако b=2, тогаш бројот $\overline{64a42}-3=\overline{64a39}$ треба да биде делив со 4, што не е можно, бидејќи неговиот двоцифрен завршеток 39 не е делив со 4. Ако b=7, тогаш бројот $\overline{64a47}-3=\overline{64a44}$ треба да биде делив со 4, што е точно, бидејќи 4 е делител на 44. Значи b=7. Бројот $\overline{64a47}-1=\overline{64a46}$ треба да биде делив со 3. Значи 3 е делител на $6+4+a+4+6=20+a$. Оттука добиваме дека $a\in\{1,4,7\}$.

VII-1 Над страните на квадратот ABCD се конструирани однадвор рамнокраки складни триаголници. Врвовите на тие триаголници се темиња на квадрат. Докажи.



Решение. Со α да го означиме аголот при врвот на рамнокраките триаголници што се конструирани над страните на квадратот ABCD, а врвовите на овие триаголници ќе ги означиме со M,N,P,Q како на цртежот. Аглите при основата на овие триаголници се по $90^\circ-\frac{\alpha}{2}$. Тогаш $\measuredangle QAM = \measuredangle MBN = \measuredangle NCP = \measuredangle PDQ = 90^\circ+\alpha$.

Бидејќи $\overline{AM}=\overline{BM}=\overline{BN}=\overline{CN}=\overline{CP}=\overline{DP}=\overline{DQ}=\overline{AQ}$, според признакот САС, следува дека триаголниците MBN, NCP, PDQ и QAM се складни. Значи $\overline{MN}=\overline{NP}=\overline{PQ}=\overline{QM}$, па четириаголникот MNPQ е ромб. Бидејќи аглите при врвот на триаголниците MBN, NCP, PDQ и QAM се по $90^\circ+\alpha$, следува дека аглите при основата на овие триаголници се по $45^\circ-\frac{\alpha}{2}$. Добиваме $\measuredangle QMN = \measuredangle QMA + \measuredangle AMB + \measuredangle BMN = 45^\circ-\frac{\alpha}{2}+\alpha+45^\circ-\frac{\alpha}{2}=90^\circ$. Докажавме: MNPQ е квадрат.

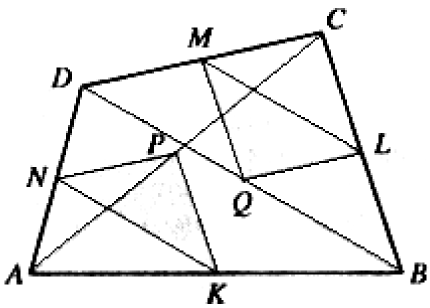
VII-2 За кои вредности на x и y изразот $4x^2+9y^2-12x+30y+2000$ има најмала вредност и колку изнесува таа?

Решение: $4x^2+9y^2-12x+30y+2000=$

$$(2x)^2-2\cdot2x\cdot3+3^2-3^2+(3y)^2+2\cdot3y\cdot5+5^2-5^2+2000=(2x-3)^2+(3y+5)^2+1966.$$

Последниот израз е секогаш позитивен. Најмала вредност ќе има ако првиот и вториот собирок се најмали, односно, ако се нула. Значи, $2x-3=0$ и $3y+5=0$. Оттука добиваме дека дадениот израз има најмала вредност за $x=\frac{3}{2}$ и $y=-\frac{5}{3}$ и таа вредност изнесува 1966.

VII-3 Нека K, L, M и N се средини, соодветно, на страните AB, BC, CD и DA на четириаголникот ABCD, а P и Q се средини на дијагоналите AC и BD, соодветно. Докажи дека триаголниците KPN и MLQ се складни.



Решение. Отсечките NP и QL се средни линии во триаголниците ACD и BCD соодветно, па $\overline{NP}=\frac{1}{2}\overline{DC}$ и $\overline{QL}=\frac{1}{2}\overline{DC}$. Значи $\overline{NP}=\overline{QL}$. Аналогно, бидејќи NK и ML се средни линии во триаголниците ABD и BCD, следува дека $\overline{NK}=\overline{ML}$. PK и MQ се средни линии во триаголниците ABC и BCD, следува дека $\overline{PK}=\overline{MQ}$. Според признакот ССС, следува дека триаголниците KPN и MLQ се складни.

VII-4 Ако од два последователни природни броеви поголемиот е полн квадрат, тогаш нивниот производ е делив со 12. Докажи!

Решение. Нека n и $n+1$ се два последователни природни броеви. Од условот на задачата следува дека $n+1=k^2$. Оттука добиваме дека $n=k^2-1$. За производот на овие броеви имаме:

$$n(n+1)=(k^2-1)\cdot k^2=(k-1)\cdot(k+1)\cdot k^2=[(k-1)\cdot k\cdot(k+1)\cdot k$$

Од три последователни броеви k-1, k и k+1 барем едниот е делив со 3. Значи, изразот во средната заграда е делив со 3. Понатаму, разгледуваме два случаи:

1^0 Ако меѓу овие три последователни броја има само еден парен, тогаш тоа мора да биде k. Значи 2 е делител на k. Бидејќи во горниот производ k се јавува два пати, тогаш целиот производ е делив со 4, па следува дека $n(n+1)$ е делив и со 12.

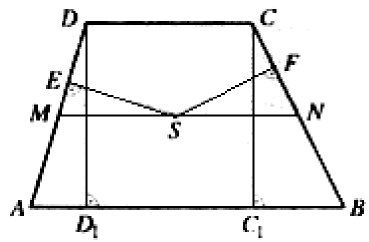
2^0 Ако, пак, меѓу овие три последователни броја два се парни, тогаш тоа мора да бидат броевите k-1 и k+1. Нивниот производ е делив со 4. Значи и во овој случај производот $n(n+1)$ е делив со 12.

VIII-1 Неколку трговци сакаат заедно да купат стока. Ако секој од нив даде по 9 јуани (кинеска пара), тогаш ќе им преостанат 11 јуани. Ако, пак, секој од нив даде по 6 јуани, ќе им недостигаа 16 јуани. Колку трговци биле и колку јуани чинела стоката?

Решение. Со x ќе го означиме бројот на трговците. Од условите на задачата ја добиваме равенката $9x-11=6x+16$, чие што решение е x=9. Значи, биле 9 трговци, а стоката чинела $9\cdot 9-11=70$ јуани.

VIII-2 Даден е трапез со плоштина 80 cm^2 и висина 8 cm. Средината на средната линија на трапезот е оддалечена од едниот крак на трапезот 3 cm, а од другиот 4 cm. Пресметај ги должините на основите на трапезот.

Решение. Нека CC_1 и DD_1 се висини во трапезот и нека $\overline{AD_1}=x, \overline{BC_1}=y$. Од $P=\dfrac{a+b}{2}h$, добиваме дека $a+b=20$, каде што a и b се должините на основите. Значи средната линија $\overline{MN}=10cm$. Со S ќе ја означиме средината на средната линија. Тогаш $\overline{MS}=\overline{SN}=5cm$ и $\overline{SE}=3cm, \overline{SF}=4cm$. Од правоаголните триаголници SEM и NFS, со примена на Питагоровата теорема, добиваме дека $\overline{ME}=4cm$ и $\overline{NF}=3cm$. Правоаголните триаголници AD_1D и MES се слични ($\angle DAD_1=\angle EMS$ - агли со паралелни краци), па следува $\overline{AD_1}:\overline{DD_1}=\overline{ME}:\overline{SE}$, односно $x:8=4:3$. Оттука добиваме $x=\dfrac{32}{3}cm$. Исто така, и правоаголните триаголници CC_1B и SFN се слични ($\angle C_1BC=\angle SFN$ - агли со паралелни краци), па следува



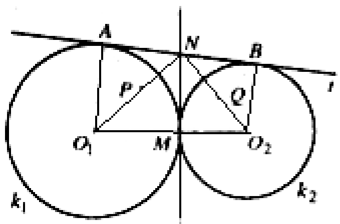
$\overline{BC_1} : \overline{CC_1} = \overline{FN} : \overline{SF}$, односно $y : 8 = 3 : 4$. Оттука добиваме $y = 6cm$. Бидејќи $a = x + b + y$, заменувајќи во равенството $a + b = 20$, добиваме $x + b + y + b = 20$, односно $b = \frac{5}{3}cm$, а $a = \frac{55}{3}cm$.

VIII-3 Одреди ги сите вредности на природниот број x, за коишто изразот $\frac{x+2000}{x-2}$ е исто така природен број.

Решение. Ако го поделиме биномот $x + 2000$ со биномот $x - 2$ ќе добиеме количник 1 и остаток 2002. Значи $\frac{x+2000}{x-2} = 1 + \frac{2002}{x-2}$. Следува дека x-2 треба да биде делител на 2002. Бидејќи $2002 = 1 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, следува дека $x - 2 \in \{1, 2, 7, 11, 13, 14, 22, 26, 77, 91, 143, 154, 286, 1001, 2002\}$ а оттука $x \in \{3, 4, 9, 13, 15, 16, 24, 28, 79, 93, 145, 156, 288, 1003, 2004\}$

VIII-4 Кружниците $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ се допираат однадвор во точката M. Правата t ги допира кружниците k_1 и k_2 во точките A и B, соодветно. Заедничката тангента во точката M ја сече отсечката AB во точката N. Докажи дека: а) $\angle AMB = 90^\circ$ б) $\angle O_1NO_2 = 90^\circ$.

Решение. а) Бидејќи $\overline{AN} = \overline{NM}$ и $\overline{BN} = \overline{NM}$ како тангентни отсечки, следи дека точките A, M и B се еднакво оддалечени од точката N, односно лежат на кружница со центар во точката N и дијаметар AB. Од Талесовата теорема следи дека $\angle AMB = 90^\circ$.



б) Четириаголниците AO_1MN и NMO_2B се делтоиди, па O_1N и O_2N се симетрали на два напоредни агли MNA и BNM, па според тоа $\angle O_1NO_2 = 90^\circ$.